

# $GIG$ 分布と $GH$ 分布に関する解析

増田 弘毅<sup>†</sup>

(受付 2002 年 6 月 17 日; 改訂 2002 年 8 月 14 日)

## 要 旨

$R_+$  上の  $GIG$  (generalized inverse Gaussian) 分布, 及びそれから正規尺度平均混合によって派生する  $R$  上の  $GH$  (generalized hyperbolic) 分布に関する様々な解析的性質を紹介する. これらは近年様々な形で数理ファイナンスで応用されており, ある種の非正規性を持つデータへの大きな順応性を有するものである. 特にこれらの分布は自己分解可能性を持ち, 従って 1 次元オルンシュタイン-ウーレンバック型過程の不変分布としての特徴付けが可能であるということについても述べる. また, 付録として多次元  $GH$  分布とその性質を紹介する.

キーワード: 自己分解可能性, 正規尺度平均混合, 無限分解可能性,  $GH$  分布,  $GIG$  分布.

## 1. はじめに

台に  $R$  を持つと仮定されたある現象のデータを扱う際に, 正規性が好ましくないという状況は多々存在する. 次の様な特徴を持つ非正規分布からの i.i.d. データがあったとしよう.

1. 単峰である.
2. 裾が正規分布のそれよりも厚い.
3. 峰点付近の集中度が高い.
4. 歪みを持つ.

これは大雑把には非対称性が存在し, かつ正規分布と比べて尖度が高いような分布に従うデータが対象となる場合を想定しているわけで, よく知られた典型的な例として数理ファイナンスにおける高頻度な (例えば分単位の) リターンデータを取り扱った場合が挙げられる. この様な状況において, 上記のデータ特性を考慮した無限分解可能分布を対応させたレヴィ過程 (ウィーナー過程や複合ポアソン過程を含むような独立定常増分を持つ連続時間のランダムウォーク) を用いた幾何レヴィ過程によってブラック-ショールズモデルの一つの拡張を考えることは自然である. 具体的なものとして 90 年代以降に  $GH$  (generalized hyperbolic) 分布に対応したレヴィ過程に基づいたモデリングが定式化され, ある種のデータ (e.g. Intraday prices, Deutsche Bank, e.g. Eberlein and Keller (1995)) への適合度の良さが実証されている. この分布は Barndorff-Nielsen (1977) が導入した, 正規分布や Student- $t$  分布をパラメータに関するある種の極限として包含する非常に高い順応性を持つ具体的な分布であり, 非対称性や裾の厚さなどを統一的に幅広く表現することができる. 数理ファイナンスにおける応用のほんの一例を挙げたが, 元々  $GH$  分布は風で飛ばされたり水で流されたりした砂粒の大きさの分布を表現

<sup>†</sup> 東京大学 大学院数理科学研究科: 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1; flstf@ms.u-tokyo.ac.jp

する目的で導入された(こういった砂に関わった様々なデータを統計的に解析していく企画は、総称して“Sand project”とよばれていた：e.g. Barndorff-Nielsen et al.(1985))ものであり、その当時において挙動の多様性という意味での  $GH$  分布の大きな潜在威力は既に認識されていた。上記の様な非正規型の分布に従うと思われるデータをパラメトリックな立場で解析する様々な状況において有意義であると思われる  $GH$  分布の解析的性質を紹介していくのが本稿の主目的であるが、後で見ると  $GH$  分布は  $R_+$  に分布する  $GIG$ (generalized inverse Gaussian) 分布の正規尺度平均混合によって定義されるものであり、その  $GIG$  分布の導入から始めた方がより系統的な解析を行えるため、本稿ではまず  $GIG$  分布を定義して詳しく紹介した後  $GH$  分布の議論に入っていき形を採った。 $GH$  分布については正規分布よりも解析的に複雑になる面は勿論あるが、それ専用の最尤推定の計算機用プログラム(例えば Bibby and Sørensen(2001))の 2.3 節で簡単に紹介されているが、筆者は入手していないなども既に開発されており、現状ではデータ解析における実用性は十分高いといえよう。

本稿では一貫してある確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  が与えられており、現れる確率変数は全てこの空間上で定義されたものとして、それらは全て 1 次元であるとする。以下で用いる記号を定義しておこう。 $u \mapsto \varphi(u)$ ,  $u \mapsto M(u)$ ,  $u \mapsto \kappa(u)$ ,  $u \in R$ ,  $u \mapsto \phi(u)$ ,  $u \in R_+$ , で各々特性関数、モーメント母関数、キュムラント母関数、ラプラス変換を表す。ここで下付きのインデックスには、各状況において対応する確率変数や分布が入る。 $X \sim F$  で、ある確率変数  $X$  が分布  $F$  に従うことを表し、更に 2 つの確率変数  $X$  と  $Y$  に対し、 $X \stackrel{L}{\sim} Y$  で  $X$  と  $Y$  が分布同等であることを表す。また、 $N := \{1, 2, \dots\}$ ,  $N_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$  とする。

本稿の構成は以下の通りである。まず第 2 節と第 3 節において各々分布の自己分解可能性、正規尺度平均混合の定式化をそれらの性質を込めて一般の枠組みで簡単に述べる。これらは本稿の主目的である  $GIG$  分布と  $GH$  分布の解析にとって重要なものであるため特に節を設けた。続く第 4 節と第 5 節が本稿の主内容であり、そこで各々  $GIG$  分布と  $GH$  分布について詳しく見ていく。特にそれらの無限分解可能性及び自己分解可能性についても解説した。幾つかの話題については参考文献を挙げるに止めた箇所もあるが、そういった場合は筆者の知る限り最も適切であると思われるものを挙げた。第 6 節においては、強定常なオルンシュタイン-ウーレンベック型過程 (OU 過程) の不変分布としての自己分解可能分布の特徴付けについて簡単に触れる。これは近年の Barndorff-Nielsen and Shephard(2001a)における一種の確率的ボラティリティ変動モデルで注目を集めている話題であり、ここでは OU 過程は潜在ボラティリティを記述している。これは Hull and White(1987)に始まる、拡散過程による潜在ボラティリティの(連続時間の)モデリングの一つのオルタナティブである。最後に付録として、本稿の至るところで用いられる変形された第 3 種ベッセル関数の性質、及び Blæsild(1981)によって示された  $GH$  分布の多次元版に関する重要な結果を紹介する。

## 2. 分布の無限分解可能性と自己分解可能性

本節では後で扱う  $GIG$  分布と  $GH$  分布の重要な性質である自己分解可能性に関する幾つかの基礎事項を簡単に述べる。以下で見ると自己分解可能性は無限分解可能性よりも強い性質であるが、1 次元の枠組みにおいては多くのよく知られた分布がこの性質をみだす。無限分解可能性及び自己分解可能性の統計学における重要性は、古く Steutel(1979)などによって既に注意されている。

まず、後の議論の為、ある分布  $F$  の無限分解可能性の定義、及びそれに関連した用語を用意しておこう。

定義 2.1. (無限分解可能性)  $X \sim F$  が無限分解可能であるとは, 各  $n \in N$  に対して以下の 2 条件をみたすような独立な確率変数列  $\{X_{nj} : j = 1, 2, \dots, n\}$  がとれることである.

1.  $X$  は以下の表現を持つ:

$$(2.1) \quad X \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{j=1}^n X_{nj}.$$

2. 各  $\epsilon > 0$  に対して, 以下が成り立つ:

$$(2.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{j \leq n} P(|X_{nj}| > \epsilon) = 0.$$

注意 2.1. 任意の無限分解可能分布  $F$  に対し,  $L_1 \sim F$  となるようなレヴィ過程  $L = (L_t)_{t \in R_+}$  が存在し, しかも  $L$  と  $F$  は 1 対 1 に対応する. この理由で, あるレヴィ過程  $L$  の特性量とは  $L_1$  が従う無限分解可能分布の特性量のことと定義する.

注意 2.2. 無限分解可能分布の定義には幾つかの同値なバージョンがある. 以下に最もシンプルでポピュラーなバージョンを紹介しておく. これは定義 2.1 よりも一見制約が強いものに見えるが, 実は同値関係にある:  $F$  が無限分解可能であるとは, 任意の  $n \in N$  に対してある分布  $F_n$  がとれて

$$(2.3) \quad \varphi_F(u) = \{\varphi_{F_n}(u)\}^n, \quad u \in R$$

とできることである. (2.3)により, 特性関数が陽に与えられる分布についてはその無限分解可能性が自明なことがある.

$1_U(\cdot)$  で区間  $[-1, 1]$  の定義関数を表すものとする.  $F$  が無限分解可能である時, その特性関数はレヴィ-ヒンチンの表現

$$(2.4) \quad \varphi_F(u) = \exp \left\{ ibu - \frac{1}{2}Cu^2 + \int_R (e^{iuz} - 1 - iu1_U(z))\nu(dz) \right\}$$

を持つのであった. ここに  $b \in R, C \geq 0, \nu$  は  $R$  上の(全測度が有限とは限らない)測度で  $\int_R (|z|^2 \wedge 1)\nu(dz) < \infty$  をみたすものであり, 各々ずれ, 正規分散, 及びレヴィ測度とよばれ, 全て非確率的なものである(関数  $1_U(\cdot)$  は原点付近で  $z$  のように振舞う任意の関数, 例えば  $z/(1+z^2)$  などに置き換えることが可能であるが, それに乗じて  $b$  は変化する). 特に  $b = C = 0$  かつ  $\nu(R) < \infty$  の場合,  $F$  は保険数理の分野などにおいて重要な役割を演じるクラスである複合ポアソン分布族に属する. 3 つ組  $(b, C, \nu)$  によって無限分解可能分布とその特性関数(分布同等を除いて) 1 対 1 に対応させられるという事実に基づいて, 本稿ではこの  $(b, C, \nu)$  を分布  $F$  の特性量とよぶことにする. ここで特に  $R_+$  上の無限分解可能分布  $F$  の台が  $R_+$  に含まれる場合について触れておこう. この場合はある  $b \geq 0$  と  $R_+$  上の測度  $\nu$  で  $\int_{R_+} (z \wedge 1)\nu(dz) < \infty$  なるものによって

$$(2.5) \quad \varphi_F(u) = \exp \left\{ ibu + \int_{R_+} (e^{iuz} - 1)\nu(dz) \right\}$$

と一意的に表される. この場合, 正規分布は  $R$  上に台を持つため正規分散が退化することは自然であるが, 更に (2.4)における関数  $1_U(\cdot)$  を 0 としてしまってもよい(Sato (1999), 第 51 節

照)ということが重要であり, 本稿においても(2.5)は後節での  $GIG$  分布の解析の一部において用いることになる. また, 台が非有界である無限分解可能分布はある一点に退化したデルタ分布に限る(Sato(1999), Corollary 24.4 参照). 例えばベータ分布, 一様分布などは無限分解可能ではない.

自己分解可能分布の定義に移ろう.

**定義 2.2.** (自己分解可能性) ある分布  $F$  が自己分解可能であるとは, 任意の定数  $c \in (0, 1)$  に対して, その  $c$  に依存することを許された分布  $F_c$  がとれて

$$(2.6) \quad \varphi_F(u) = \varphi_F(cu)\varphi_{F_c}(u)$$

が成り立つことである. または同値な定義として, 確率変数  $X$  が  $F$  に従う時, 任意の定数  $c \in (0, 1)$  に対して  $X$  と独立である ( $c$  に依存した) 確率変数  $Y_c$  がとれて

$$(2.7) \quad X \stackrel{L}{=} cX + Y_c$$

が成り立つ時,  $F$  は自己分解可能であるという.

自己分解可能分布は必ず無限分解可能である(一般には逆は正しくない). 実は(2.6)もしくは(2.7)からの帰結として,  $Y_c$  の分布  $F_c$  は無限分解可能となることが知られている. 証明は例えば Sato(1999), Proposition 15.5 を参照されたい. また, 自己分解可能性が畳み込みのもとで閉じていることも定義から明らかである. 更に, 定義 2.2 の他, ある種の極限分布として自己分解可能性を特徴付けることもできる. この詳細については, 例えば Sato(1999) の Theorem 15.3 を見られたい.

さて, 一般に無限分解可能分布  $F$  が自己分解可能となるための必要十分条件は, 以下の通りレヴィ測度  $\nu$  にのみ課される.

**命題 2.1.** (e.g. Sato(1999), Corollary 15.11) ある無限分解可能分布  $F$  が(2.4)をみたしていると仮定する. この時,  $F$  が自己分解可能となるための必要十分条件はレヴィ測度  $\nu$  が以下の形になることである.

$$(2.8) \quad \nu(B) = \int_B \frac{k(z)}{|z|} dz, \quad B \in \mathcal{R} \setminus \{0\}.$$

ここで  $k(\cdot)$  は  $(-\infty, 0)$  上単調増加, かつ  $(0, \infty)$  上単調減少となる  $\mathcal{R} \setminus \{0\}$  上の非負関数である.

命題 2.1 は実際, 1次元自己分解可能分布のレヴィ測度はルベーグ測度に関して絶対連続であり, しかもそのレヴィ密度関数は  $k(z)/|z|$  の形で与えられることも主張していることに注意したい.

**例 2.1.** 応用上頻りに現れる多くの分布は自己分解可能である. 例えば正規, パレート,  $F$ , 対数正規(一般化)ロジスティック,  $z$  分布(c.f. Barndorff-Nielsen et al.(1982))などは自己分解可能である. また, 後節で紹介する  $GIG$  分布と  $GH$  分布はそれらの特別な場合として現れる全ての分布を込めて自己分解可能である.

以下, 一般の 1次元自己分解可能分布の有する著しい性質を 2 つ述べておく.

命題 2.2. (e.g. Sato(1999), Theorem 27.13) 全ての 1 次元自己分解可能分布はルベーグ測度に関して絶対連続である.

$R$  上の確率測度  $F = F(dx)$  が峰点(mode)  $a \in R$  を持つ単峰(unimodal)分布であるとは,  $F(dx) = c\delta_a(x) + f(x)dx$ ,  $c \geq 0$ ,  $\delta_a$  は 1 点  $a$  に退化したデルタ確率測度, と書いて更に  $f(x)$  が  $(-\infty, a)$  上増加かつ  $(a, \infty)$  上減少となることであった. 以下の命題 2.3 は, 峰が 2 つ以上あるような分布は自己分解可能ではあり得ないことを示している(即ち, 峰が 2 つ以上あると思われるデータのモデリングにおいては, ある自己分解可能分布単体のみでは不十分であることが従う).

命題 2.3. (Yamazato(1978)) 全ての 1 次元自己分解可能分布は単峰である.

### 3. 正規尺度平均混合

本節では以下で定義される正規尺度平均混合に関連した一般的な性質について述べていく.

定義 3.1. (正規尺度平均混合)  $Z$  を  $R_+$  上に分布する確率変数とし,  $\eta$  で  $Z$  と独立な標準正規確率変数を表す. この時, ある定数  $\mu \in R$  と  $\beta \in R$  によって新しい確率変数  $Y$  を

$$(3.1) \quad Y = \mu + \beta Z + \sqrt{Z}\eta$$

で定義する時,  $Z$  を混合要素(mixing distribution),  $Y$  を  $Z$  による正規尺度平均混合(normal variance-mean mixture)とよぶ.

(3.1)によってある  $R_+$  上の確率変数から  $R$  上の確率変数を構成する一つの統一的な手段が得られることになるが, 一般に正規尺度平均混合はその密度関数と特性関数に関して特別な関係及び性質をもたらす.

命題 3.1. 正規尺度平均混合に関して以下の性質が成り立つ.

1. (3.1)における  $Z$  の分布が絶対連続であると仮定し, その密度関数を  $p_Z(z)$  と書こう.(3.1)より明らかに  $Y$  の  $Z$  に関する条件付分布  $Y|Z=z$  に従う確率変数は  $Y|Z=z \sim N(\mu + \beta z, z)$  をみたすから,  $Y$  の分布の密度関数  $p_Y(y)$  は以下で与えられる.

$$(3.2) \quad p_Y(y) = \frac{e^{\beta(y-\mu)}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\beta^2 z + \frac{(y-\mu)^2}{z}\right\}\right] p_Z(z) dz.$$

適当な  $p_Z(z)$  に対しては実際に計算して積分表示を消し,  $p_Y(y)$  の簡単な表現を得ることが可能となる(特に本稿第 5 節で扱う GH 分布はその場合に相当する).

2. (3.1)によって以下の性質が従う.

$$(3.3) \quad \varphi_Y(u) = e^{iu\mu} M_Z\left(iu\beta - \frac{u^2}{2}\right), \quad u \in R.$$

3. 正規尺度平均混合のもとで無限分解可能性と自己分解可能性は保存される. 即ち,  $Z$  を  $R_+$  上の無限分解可能分布に従う確率変数であるとする時(3.1)で定義される正規尺度平均混

合  $Y$  も無限分解可能である．更に， $Z$  が  $R_+$  上の自己分解可能な確率変数であれば  $Y$  も自己分解可能である．

注意 3.1. 命題 3.1 の 3 について，無限分解可能性の保存に関しては既に Feller (1966) において一般の従属化の枠組みで述べられているが，自己分解可能性の保存に関してはそれが（一次元の場合において）一般に正当化されたのは最近の Sato (2001) においてであり，この結果以前には，自己分解可能性の保存はある特別な分布族を対象を限定して議論されていた．第 4 節において  $GIG$  分布の自己分解可能性について述べる際，この例について簡単に触れる．

注意 3.2. 上記の性質 1, 2 及び 3 の無限分解可能性の保存については  $\eta$  が一般の多次元正規確率変数である場合への直接的な拡張を許すが，性質 3 の自己分解可能性の保存に関しては状況はそれ程簡単ではない．多次元の場合，我々は自己分解可能性の定義から見直す必要があり，Urbanik (1972) が提示した作用素的自己分解可能性 (operator selfdecomposability) なる概念を導入せねばならない．この詳細については本稿の対象外であるためここでは触れないが，Urbanik (1972) 以後の様々な研究者による膨大な結果を網羅したよい教科書として Jurek and Mason (1993) を挙げておきたい．特に Yamazato (1983) は命題 2.2 の主張を作用素的自己分解可能分布の枠組みへ一般化した．

注意 3.3. (命題 3.1 の記号を用いて) 与えられた  $p_Z(z)$  の裾での挙動から  $p_Y(y)$  のそれを正確に特定する重要な結果が知られている．この詳細については Barndorff-Nielsen et al. (1982) を参照されたい．

正規尺度平均混合を特性量の観点から定式化しておこう (これは第 5 節で， $GH$  分布のレヴィ測度を  $GIG$  分布のそれから導出するのに適用できる)．

命題 3.2. (正規尺度平均混合による特性量の変換) (3.1) における  $Z$  の分布を無限分解可能とし，その特性量を  $(b_Z, 0, \nu_Z)$  とおく時 (既に言及した通り  $\varphi_Z(\cdot)$  は (2.5) の形である) (3.1) で定義される  $Y$  の特性量  $(b_Y, C_Y, \nu_Y)$  は以下で与えられる．

$$(3.4) \quad b_Y = \mu + b_Z \beta + \int_0^\infty \int_{|y| \leq 1} y P^{N(s\beta, s)}(dy) \nu_Z(ds),$$

$$(3.5) \quad C_Y = b_Z,$$

$$(3.6) \quad \nu_Y(B) = \int_0^\infty P^{N(s\beta, s)}(B) \nu_Z(ds), \quad B \in \mathcal{B}(R \setminus \{0\}).$$

ここで  $P^{N(s\beta, s)}(\cdot)$  は平均  $s\beta$ ，分散  $s$  の 1 次元正規分布に対応した確率測度である．特に  $b_Z = 0$  の時は， $Y$  は畳み込み因子に正規分散の要素を持たない無限分解可能分布を持ち，更に  $\beta = \mu = 0$  であれば  $b_Y = C_Y = 0$  となって  $Y$  の分布はそれに対応するレヴィ測度のみで完全に特徴付けられる．

命題 3.2 は，レヴィ過程の枠組みで記述された従属操作に関する定理 (例えば Sato (1999), Theorem 30.1 参照) を我々の状況に対して十分な形にまで切り詰めて述べたものである．実際，正規尺度平均混合は，ずれを持つウィーナー過程に対する従属操作と ( $\mu$  を除いて) 密接な関係を持つ．

例 3.1. 命題 3.2 を用いて,  $Z$  がレヴィ分布(指数  $1/2$  を持つ片側安定分布)である時の正規尺度平均混合における特性量の変換を行ってみよう.

パラメーター  $\delta > 0$  を持つこの分布の密度関数は

$$(3.7) \quad \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2x}\right)$$

で与えられ, 特性量  $(0, 0, \nu_Z)$ ,  $\nu_Z(dz) := \delta x^{-3/2}/\sqrt{2\pi}$ ,  $z > 0$ , を持つ(Sato(1999), Example 8.11 参照). 対応する正規尺度平均混合  $Y$  の密度関数は(3.2)により

$$(3.8) \quad p_Y(y) = \frac{\delta|\beta|e^{\beta(y-\mu)}}{\pi\sqrt{\delta^2 + (y-\mu)^2}} K_1(|\beta|\sqrt{\delta^2 + (y-\mu)^2})$$

となり, これは非対称コーシー分布の密度関数である. ここで  $K_\lambda(\cdot)$  は指数  $\lambda \in \mathbf{R}$  を持つ変形された第 3 種ベッセル関数を表す(特に後節で見る GIG 分布と GH 分布の解析にはこの特殊関数の様々な性質を用いることになるので, これらを付録の A 節にまとめておいた. 以後, そこからの性質を頻繁に用いることになる). (3.8) において  $|\beta| \downarrow 0$  とすれば (A.8) を介してコーシー分布の密度関数が得られることが分かる.

さて, まず(3.5)より  $C_Y = 0$  となる. 次に(3.6)と後の第 4 節で述べる GIG 分布の密度関数(4.1)を用いて

$$(3.9) \quad \nu_Y(dy) = \frac{\delta|\beta|e^{\beta y}}{\pi|y|} K_1(|\beta y|) dy$$

と計算できる. 勿論 (3.9) で  $|\beta| \downarrow 0$  とすればコーシー分布のレヴィ測度,  $\{\delta/(\pi y^2)\} dy$  に収束する. 最後に  $b_Y$  は(3.4)により, 以下のように計算される.

$$(3.10) \quad b_Y = \mu + \frac{\delta K_0(|\beta|)}{\pi} (e^{-\beta} - e^{\beta}) + \frac{\delta\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty s^{-1/2} \left\{ F_N\left(\frac{1-\beta s}{\sqrt{s}}\right) - F_N\left(\frac{-1-\beta s}{\sqrt{s}}\right) \right\} ds.$$

ここで  $F_N(z)$  は標準正規分布の分布関数を表す. 特に  $\beta = 0$  の場合,  $b_Y = \mu$  となる.

例 3.2. 同様にして,  $Z$  がガンマ分布  $\Gamma(a, b)$ ,  $a, b > 0$ , に従う時の正規尺度平均混合における特性量の変換を行ってみる. ここで密度関数の記法は

$$(3.11) \quad \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx)$$

であるとする.

$\Gamma(a, b)$  の特性量は  $(0, 0, \nu_Z)$ ,  $\nu_Z(dz) := az^{-1} \exp(-bz)$ ,  $z > 0$ , で与えられる(e.g. Sato(1999), Example 8.10)ので, 対応する正規尺度平均混合の特性量  $(b_Y, C_Y, \nu_Y)$  は以下の通り.

$$(3.12) \quad b_Y = \mu + a \left( \frac{\beta}{b} + \frac{e^{\beta - \sqrt{\beta^2 + 2b}}}{\beta - \sqrt{\beta^2 + 2b}} + \frac{e^{-\beta - \sqrt{\beta^2 + 2b}}}{\beta + \sqrt{\beta^2 + 2b}} \right),$$

$$C_Y = 0,$$

$$\nu_Y(dy) = \frac{a}{|y|} \exp(\beta y - |y|\sqrt{\beta^2 + 2b}) dy.$$

これらは(パラメーターの記法は異なるが)後の第 5.2.7 節で紹介する  $NG$ (normal gamma) 分布の特性量に対応する.

#### 4. $GIG$ 分布

本節では  $GIG$ (generalized inverse Gaussian) 分布とよばれる  $R_+$  上の分布をその性質と共に詳しく紹介する.

##### 4.1 $GIG$ 分布の定義と性質

$GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  分布は密度関数

$$(4.1) \quad p_{GIG}(x; \lambda, \delta, \gamma) = \frac{(\gamma/\delta)^\lambda}{2K_\lambda(\gamma\delta)} x^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{x} + \gamma^2 x\right)\right\}, \quad x > 0,$$

を持つ  $R_+$  上の分布である. パラメーター  $(\lambda, \gamma, \delta)$  のとる値の範囲は  $x = 0, \infty$  で(4.1)の可積分性に伴って以下ようになる.

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \lambda > 0 \text{ の時, } & \delta \geq 0, \gamma > 0, \\ \lambda = 0 \text{ の時, } & \delta > 0, \gamma > 0, \\ \lambda < 0 \text{ の時, } & \delta > 0, \gamma \geq 0. \end{aligned}$$

ここで  $\delta = 0$  または  $\gamma = 0$  の場合は (A.8)(A.9) 及び (A.10) に基づいた極限として定義されるものと解釈する.

$GIG$  分布の起源は古く, 1940 年代まで遡る.  $GIG$  分布を導入したのは, その当時 *Électricité de France* (フランス電力公社) に勤めていた統計学者, Étienne Halphen である. 水力発電部門において彼は月毎の水の流入出率をモデル化する仕事を請け負っており, 新しい型の分布の導入の必要性に迫られていた. まず Halphen は 1941 年に (4.1) の  $\lambda = 0$  の場合に対応する分布を導入した.  $X \sim GIG(0, \delta, \gamma)$  に対し,  $\delta$  と  $\gamma$  を適当に調節することによって対応する  $X^{-1}$  が同分布になる性質(以下の分布の性質の紹介などを参照)から, 当時その分布は調和分布(harmonic law)とよばれていたとのことである. 実際, これは Halphen が観測データの特性から事前に希望していた性質であるらしい. ところが当時の戦時中という環境が Halphen の行動を規制したこともあり, この分布を最初に論文の形で発表したのは D. Dugué という別の人であった(勿論その中で Halphen について触れている). その後  $\lambda \in R$  をパラメーターとして新たに加え, Halphen が (4.1) の形にたどり着いたのは 1946 年のことである. 導入当時, Halphen はこの分布を A 型分布とよんでいた. Halphen はその他, B 型分布とよばれていたものなども導入したが, 本稿では扱わない. また, G. Morlat は統計的水文学(statistical hydrology)における Halphen の仕事の重要性を解説した論文として Morlat (1956)を出している. 以上で簡単に述べた  $GIG$  分布の起源に関しては, Seshadri (1993, 1997) から引用した.

$GIG$  分布は, その後上記以外の様々な分野においてその応用が試みられてきた. 例えば Jørgensen (1982) の第 6 章及び 7 章を見られたい. 特にその第 6 章では  $GIG$  分布の生存時間モデルとしての応用について触れており, 対応するハザード関数の漸近挙動が議論されている.

さて,  $\gamma \delta \neq 0$  のもとでは  $GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  を考える時

$$(4.3) \quad \phi_{GIG}(u) = \left(1 + \frac{2u}{\gamma^2}\right)^{-\lambda/2} \frac{K_\lambda\left(\delta\sqrt{\gamma^2 + 2u}\right)}{K_\lambda(\delta\gamma)}$$

となるが,  $\delta = 0$  または  $\gamma = 0$  の場合はこの (4.3) における各々の極限として定義される.  $\delta = 0$



( $\lambda > 0$ ) の時は (A.9) を用いて

$$(4.4) \quad \phi_{GIG}(u) = \left(1 + \frac{2u}{\gamma^2}\right)^{-\lambda}$$

であり, 同様に  $\gamma = 0$  ( $\lambda < 0$ ) の時は (A.10) を用いて

$$(4.5) \quad \phi_{GIG}(u) = \frac{2^{1+\lambda/2} K_{\lambda}(\delta\sqrt{2u})}{\delta^{\lambda} u^{\lambda/2} \Gamma(-\lambda)}$$

となる.

$GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  の  $k$ -次モーメント  $m(k)$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , の存在, 及びその表示について見ていこう. まず基本となる  $\delta\gamma \neq 0$  の場合は

$$(4.6) \quad m(k) = \frac{K_{\lambda+k}(\delta\gamma)}{K_{\lambda}(\delta\gamma)} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^k$$

で与えられる.  $\delta = 0$  ( $\lambda > 0$ ) の時は (A.9) を用いて

$$(4.7) \quad m(k) = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{\gamma^2}{2}\right)^{-k},$$

$\gamma = 0$  ( $\lambda < 0$ ) の時は,  $k < -\lambda$  の時に限って  $m(k)$  は存在し, それは (A.10) を介して

$$(4.8) \quad m(k) = \frac{\Gamma(-\lambda-k)}{\Gamma(-\lambda)} \left(\frac{\delta^2}{2}\right)^k,$$

で与えられる. 即ち,  $m(k)$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , は  $\gamma = 0$  の時を除けば常に存在し,  $\gamma = 0$  の時には  $k < -\lambda$  である  $k$  に対して存在することになる. 更に,  $GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  に対して

$$(4.9) \quad \kappa_{GIG}(u) = -\frac{\lambda}{2} \log\left(1 - \frac{2u}{\gamma^2}\right) + \log K_{\lambda}(\delta\sqrt{\gamma^2 - 2u}) - \log K_{\lambda}(\delta\gamma)$$

を (A.5) を介して微分していくことにより, モーメントの存在条件のもとで任意の次数のキュムラント  $\kappa_{GIG,j}$ ,  $j \in \mathbf{N}$ , を求めることが可能である. 特に平均と分散は各々

$$(4.10) \quad \kappa_{GIG,1} = \frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{K_{\lambda}(\zeta)} \eta,$$

$$(4.11) \quad \kappa_{GIG,2} = \left\{ \frac{K_{\lambda+2}(\zeta)}{K_{\lambda}(\zeta)} - \left(\frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{K_{\lambda}(\zeta)}\right)^2 \right\} \eta^2$$

で与えられる. ここで  $\eta = \delta/\gamma$ ,  $\zeta = \delta\gamma$  とおいた. 同様に歪度  $\kappa_{GIG,3}/\kappa_{GIG,2}^{3/2}$  と尖度  $\kappa_{GIG,4}/\kappa_{GIG,2}^2$  も簡単にその陽な表示を求められる(それらは  $\eta$  に依存しないことが確かめられる). ここで高次のキュムラントを求める際, 例えば漸化式 (A.3) を順次適用すればベッセル関数の指数を  $\lambda+1$  と  $\lambda$  に固定したままの表現を得ることができる. これらの表示については Jørgensen(1982) を参照されたい.

Jørgensen(1982) には様々な場合の GIG 分布のグラフが与えられている. ここでは,  $\delta = \gamma = 1$  を固定した時の  $\lambda$  の変化による様相だけ図 1 に与えておく.

以下, GIG 分布のその他の幾つかの性質について触れておこう.

1.  $X \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$ ,  $c$  を任意の正数とする時,

$$(4.12) \quad X^{-1} \sim GIG(-\lambda, \gamma, \delta),$$

$$(4.13) \quad cX \sim GIG(\lambda, \sqrt{c}\delta, \gamma/\sqrt{c})$$

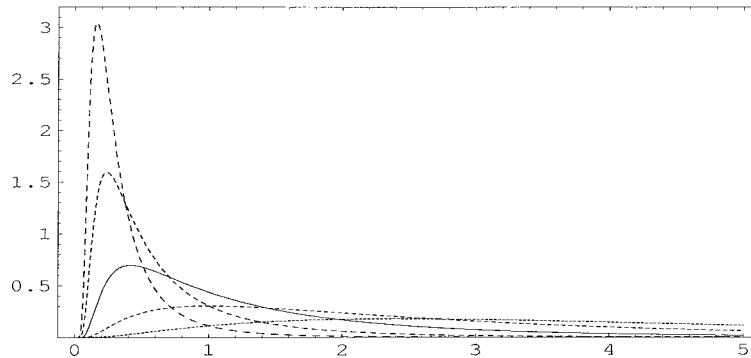


図 1.  $\lambda = -2, -1, 0, 1, 2$  に対する  $GIG(\lambda, 1, 1)$  の密度関数：実線が  $\lambda = 0$  の場合で，点線は粗い順に  $\lambda = -2, -1, 1, 2$  に対応する。

が成り立つ．これらは共にラプラス変換の公式(4.3)から容易に分かる．従って  $\zeta$  は，尺度変換，及び逆数をとる操作のもとで不変であることが分かる．

2. ラプラス変換の公式(4.3)(4.4)及び(4.5)より，以下の合成積公式が直ちに従う．

$$(4.14) \quad GIG(-1/2, \delta_1, \gamma) * GIG(-1/2, \delta_2, \gamma) = GIG(-1/2, \delta_1 + \delta_2, \gamma),$$

$$(4.15) \quad GIG(\lambda_1, 0, \gamma) * GIG(\lambda_2, 0, \gamma) = GIG(\lambda_1 + \lambda_2, 0, \gamma),$$

$$(4.16) \quad GIG(-1/2, \delta_1, \gamma) * GIG(1/2, \delta_2, \gamma) = GIG(1/2, \delta_1 + \delta_2, \gamma),$$

$$(4.17) \quad GIG(-\lambda, \delta, \gamma) * GIG(\lambda, 0, \gamma) = GIG(\lambda, \delta, \gamma).$$

3.  $GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  の峰点(mode point)  $m_{GIG}$  は

$$(4.18) \quad m_{GIG} = \begin{cases} \frac{\delta^2}{2(1-\lambda)} & \gamma = 0 \text{ の時,} \\ \frac{\lambda - 1 + \sqrt{(\lambda - 1)^2 + \delta^2 \gamma^2}}{\gamma^2} & \gamma \neq 0 \text{ の時,} \end{cases}$$

で与えられる．これは密度関数の表示式(4.1)を実際に  $x$  について微分してみればよい．特に  $\lambda \geq 1$  の時は強単峰(即ちその対数密度が concave, e.g. Sato(1999), Theorem 52.3)である．

4.  $X_j, j = 1, 2, \dots, n$ , を  $GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  に従う i.i.d. 確率変数とする時，統計量の 3 つ組

$$(4.19) \quad \left( \sum_{j=1}^n X_j, \sum_{j=1}^n X_j^{-1}, \sum_{j=1}^n \log X_j \right)$$

は  $(\lambda, \delta, \gamma)$  に対しての完備な最小十分統計量となる．

$GIG$  分布からの i.i.d. データに基づいた最尤推定については Jørgensen(1982)を参照されたい．

#### 4.2 特別な場合として現れる分布

$GIG$  分布がそのパラメーターに関する極限分布としてガンマ分布と逆ガンマ分布を含んでいることは，既に見たラプラス変換の表現(4.4)及び(4.5)から明らかであろう．本節では，これら 2 つの分布以外にも幾つかの分布がパラメーターに関する極限分布，もしくは真に包含されている分布として実現されることを紹介したい(ガンマ分布と逆ガンマ分布も込めて列挙する)．以下の密度関数の表示式におけるパラメーターは全て(4.1)から導いた形のままになっていることに注意されたい．

逆正規 ( $IG$ ) 分布 .  $\lambda = -1/2, \delta > 0, \gamma \geq 0$  に対応する . これは (A.7) を用いれば直ちに分かる . 密度関数は以下の通り .

$$(4.20) \quad p_{IG}(x; \delta, \gamma) := \frac{\delta e^{\delta\gamma}}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \gamma^2 x + \frac{\delta^2}{x} \right) \right\} .$$

特に  $\gamma = 0$  の場合はレヴィ分布 (例 3.1 参照) である .

$IG(\delta, \gamma)$  分布は以下のような確率的解釈を有することはよく知られている : ずれ  $\gamma$  を持つウィーナー過程  $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  及び  $\delta > 0$  に対して  $T_\delta$  を  $T_\delta = \inf\{s \geq 0 : W_s = \delta\}$  で定義する . この時  $T_\delta$  は停止時となり , 更に  $T_\delta \sim IG(\delta, \gamma)$  が成り立つ . 後の第 5.2.5 節で紹介する  $NIG$  分布もこれに類似した解釈を持つ .

相反逆正規 (reciprocal inverse Gaussian,  $RIG$ ) 分布 .  $\lambda = 1/2, \delta \geq 0, \gamma > 0$  に対応する . これも (A.7) より従う . 密度関数は以下の通り .

$$(4.21) \quad p_{RIG}(x; \delta, \gamma) := \frac{\gamma e^{\delta\gamma}}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \gamma^2 x + \frac{\delta^2}{x} \right) \right\} .$$

これは  $X \sim IG(\delta, \gamma)$  の時の  $X^{-1}$  の分布である .

ガンマ ( $\Gamma$ ) 分布 .  $\delta = 0, \gamma > 0, \lambda > 0$  に対応する .

$$(4.22) \quad p_\Gamma(x; \lambda, \gamma^2/2) := \frac{(\gamma^2/2)^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} \exp \left( -\frac{\gamma^2}{2} x \right) .$$

逆ガンマ ( $I\Gamma$ ) 分布 .  $\gamma = 0, \delta > 0, \lambda < 0$  に対応する .

$$(4.23) \quad p_{I\Gamma}(x; \lambda, \delta^2/2) := \frac{(\delta^2/2)^{-\lambda}}{\Gamma(-\lambda)} x^{\lambda-1} \exp \left( -\frac{\delta^2}{2x} \right) .$$

前節でこの分布の (高次の) モーメントの存在はパラメーターに依存することは既に見た . 実際この場合は上側の裾がパレート型 , 即ち  $x \rightarrow \infty$  の時  $O(x^{\lambda-1})$  となる .

Positive hyperbolic ( $PH$ ) 分布 .  $\lambda = 1, \delta \geq 0, \gamma > 0$  に対応する . これは (4.1) において , 変数  $x$  の影響が全て指数部分に集約されるという意味で特別な分布である .

$$(4.24) \quad p_{PH}(x; \delta, \gamma) := \frac{\gamma}{2\delta K_1(\delta\gamma)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \gamma^2 x + \frac{\delta^2}{x} \right) \right\} .$$

特に  $\delta = 0$  の時はパラメーター  $\gamma^2/2$  の指数分布となる .

デルタ ( $\delta_c$ ) 分布 .  $\delta/\gamma \rightarrow c \in (0, \infty)$  なる制約のもとで  $\gamma, \delta \rightarrow \infty$  とすれば (4.1) は

$$(4.25) \quad p_{\delta_c}(x; c) := \begin{cases} \infty, & x = c \text{ の時} \\ 0, & x \neq c \text{ の時} \end{cases}$$

となる .

調和 ( $h$ ) 分布 .  $\lambda = 0, \delta > 0, \gamma > 0$  に対応する . この時 (4.1) は若干簡略化され ,

$$(4.26) \quad p_h(x; \delta, \gamma) := \frac{1}{2x K_0(\delta\gamma)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\delta^2}{x} + \gamma^2 x \right) \right\} .$$

となる。(4.12)によって  $X \sim GIG(0, \delta, \gamma)$  であれば  $X^{-1} \sim GIG(0, \gamma, \delta)$  であるから,  $\delta = \gamma$  の時は  $X \stackrel{L}{=} X^{-1}$  となることが分かる.

注意 4.1. 前節において  $GIG$  分布に関する合成積公式を列挙したが (4.14)(4.15)は各々  $IG$  分布,  $\Gamma$  分布の再生性に他ならない. また (4.16)と(4.17)は各々,  $IG$  分布と  $RIG$  分布, 及び  $GIG$  分布と  $\Gamma$  分布の間の特別な合成積の関係を表している.

#### 4.3 $GIG$ 分布の無限分解可能性及び自己分解可能性

任意の  $GIG$  分布は無限分解可能であるばかりでなく, 自己分解可能でもある. これらは各々 Barndorff-Nielsen and Halgreen(1977)及び Halgreen(1979)によって示された.

まず無限分解可能性であるが, 一般の  $GIG$  分布のラプラス変換(4.3)はベッセル関数を含んでおり, その表現からは無限分解可能であるかどうかは一見では明らかでない. Barndorff-Nielsen and Halgreen(1977)の用いた  $GIG$  分布の無限分解可能性の証明は以下の2つの命題が本質的となっている.

命題 4.1. (e.g. Feller(1966), p. 425, Theorem 1) 関数  $\phi(u), u \in (0, \infty)$ , が  $R_+$  上のある無限分解可能分布のラプラス変換であるためには,  $\phi(0) = 1$  でしかも  $\tilde{\phi}(u) := -d \log \phi(u)/du$  が完全単調, 即ち任意の  $n \in N_0$  に対して  $(-1)^n \tilde{\phi}^{(n)}(u) \geq 0, u \in (0, \infty)$ , が成り立つことが必要十分である.

ここで  $z \geq 0, \nu \geq 0$  に対して関数

$$(4.27) \quad Q_\nu(z) = \frac{K_{\nu-1}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}K_\nu(\sqrt{z})}$$

を定義する. 以下の結果は Grossward(1976)が Student- $t$  分布の無限分解可能性を証明する際に得た副産物である.

命題 4.2. (Grossward(1976))  $Q_\nu(z)$  は完全単調である. 特に積分表示

$$(4.28) \quad Q_\nu(z) = \int_0^\infty \frac{g_\nu(x)}{x+z} dx$$

を持つ. ここで

$$(4.29) \quad g_\nu(x) = \frac{2}{\pi^2 x \{J_\nu^2(\sqrt{x}) + Y_\nu^2(\sqrt{x})\}}$$

で,  $J$  と  $Y$  は各々第1種, 2種のベッセル関数である.

注意 4.2. 命題 4.2 における  $Q_\nu(z)$  の完全単調性は, 後に Ismail(1977)によって  $\nu \in R$  の場合に拡張された.

さて,  $GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  のラプラス変換(4.3)については

$$(4.30) \quad -\frac{d \log \phi_{GIG}(u)}{du} = \begin{cases} \frac{2\lambda}{\delta^2 + 2u} + \delta^2 Q_\lambda(\delta^2(\gamma^2 + 2u)), & \lambda \geq 0 \text{ の時,} \\ \delta^2 Q_{-\lambda}(\delta^2(\gamma^2 + 2u)), & \lambda \leq 0 \text{ の時,} \end{cases}$$

と計算できるので, 命題 4.1, 4.2 より一般の  $GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  分布の無限分解可能性が示されたことになる.

次に  $GIG$  分布の自己分解可能性について簡単に触れよう. 一般の  $GIG$  分布の自己分解可能性を最初に示したのは Halgreen (1979) である. そこでは  $GIG$  分布が以下で定義される, 自己分解可能な分布族の部分族である generalized gamma convolution (GGC) であることを示すことによって自己分解可能性が導かれている.

定義 4.1.  $R_+$  上のある分布  $F$  が GGC であるとは,

$$(4.31) \quad \phi_F(u) = \exp \left\{ -bu - \int_0^\infty \log \left( 1 + \frac{u}{y} \right) U(dy) \right\}$$

と表されることである. ここで  $b \geq 0$ , かつ  $U$  は  $U(\{0\}) = 0$  なる  $R_+$  上の測度で以下の 2 条件をみたすものである.

$$(4.32) \quad \int_0^1 |\log y| U(dy) < \infty, \quad \int_1^\infty y^{-1} U(dy) < \infty.$$

GGC は Thorin (1977) によって導入され, その後多くの研究者によって関連した論文が発行された. 現在は教科書として Bondesson (1992) があるので, 興味のある方はそちらを参照されるとよいと思う.

さて,  $GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  に関してはまず  $\lambda \leq 0$  の時 (4.28) (4.29) 及び (4.30) を用いて

$$(4.33) \quad \log \phi_{GIG}(u) = -\delta^2 \int_{\gamma^2/2}^\infty g_{-\lambda}(\delta^2(2y - \gamma^2)) \log \left( 1 + \frac{u}{y} \right) dy$$

と計算される. 実際 (4.33) は積分順序の交換と変数変換によって簡単に示される (4.31) の  $U(dy)$  として  $(\gamma^2/2, \infty)$  上に集中した密度関数  $v(y) := \delta^2 g_{-\lambda}(\delta^2(2y - \gamma^2))$  を持つ測度が対応するが,  $U(dy)$  に関する積分条件 (4.32) の成立はベッセル関数  $J_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$  の  $z \rightarrow \infty$  の時の漸近挙動 (Abramowitz and Stegun (1968) の 9.1 節参照) によって正当化できる. 残る  $\lambda > 0$  の場合の自己分解可能性であるが, これは自己分解可能性が畳み込みのもとで閉じていることと, ガンマ分布が自己分解可能であることを踏まえて合成積公式 (4.17) を用いれば  $\lambda \leq 0$  の場合に帰着される. 以上により一般の  $GIG$  分布の自己分解可能性が従うことになる.

Halgreen (1979) の結果の副産物として,  $GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  のレビイ密度関数の表現を得ることができる.

命題 4.3.  $GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  は絶対連続なレビイ測度を持ち, その密度関数  $u(y)$ ,  $y > 0$  は以下の表現を持つ.

$$(4.34) \quad u(y) = \frac{e^{-\gamma^2 y/2}}{y} \left\{ \delta^2 \int_0^\infty e^{-yx} g_{|\lambda|}(2\delta^2 x) dx + (\lambda \vee 0) \right\}.$$

(4.34) の証明の概略は大体以下の通りである.  $\lambda \leq 0$  の時は (4.33) を両辺  $u$  に関して微分したものと,  $\nu_{GIG}(\cdot)$  で  $GIG$  分布のレビイ測度を表す時の一般の式

$$\frac{d \log \phi_{GIG}(u)}{du} = - \int_0^\infty y e^{-yu} \nu_{GIG}(dy)$$

を積分順序の交換と変数変換を介して比較することで (4.34) を得る.  $\lambda > 0$  の時には (4.17) に従って,  $\Gamma(\lambda, \gamma^2/2)$  のレヴィ密度関数  $\lambda y^{-1} \exp(-\gamma^2 y/2)$  を加えればよい.

注意 4.3. 本節で述べた  $GIG$  分布の自己分解可能性を示す流れは Halgreen (1979) の議論に忠実に従ったものであるが,  $GIG$  分布のレヴィ密度関数に関する命題 4.3 を既知として命題 2.1 を用いれば,  $GGC$  の概念を介することなく, より直接的な証明を与えることができる. 実際 (4.34) を  $u(y) = y^{-1}v(y)$  と書く時

$$\frac{dv(y)}{dy} = -e^{-\gamma^2 y/2} \left\{ \frac{\gamma^2}{2} (\lambda \vee 0) + \delta^2 \int_0^\infty x e^{-yx} g_{|\lambda|}(2\delta^2 x) dx + \frac{\delta^2 \gamma^2}{2} \int_0^\infty e^{-yx} g_{|\lambda|}(2\delta^2 x) dx \right\}$$

であることが分かり, 明らかに  $dv(y)/dy \leq 0$  であるから  $v(y)$  は  $R_+$  上単調減少で, 従って命題 2.1 によって全ての  $GIG$  分布は自己分解可能となる.

注意 4.4. Barndorff-Nielsen et al. (1978) は, 任意の与えられた正の初期状態と, ある特定の係数を持つ拡散過程の 0 への初到達時刻の分布としての  $GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  分布,  $\lambda \leq 0$ , の解釈を与え, その副産物として一般の  $GIG$  分布の無限分解可能性を導いた.

#### 4.4 $GIG$ 分布からの種々の誘導に関するコメント

互いに独立な 2 つの確率変数  $X_j, j = 1, 2$ , が  $X_j \sim GIG(\lambda_j, \delta_j, \gamma_j)$  をみたす時,  $\alpha > 0$  に対する  $Y^{(1)} := X_1^{1/\alpha}$ , また  $Y^{(2)} := \sqrt{X_1 X_2}$  や  $Y^{(3)} := \sqrt{X_1/X_2}$  などの変換された確率変数の密度関数を考えることにより, より順応性の高い分布を導くことができる. ここでは  $Y^{(1)}$  の分布の密度関数についてのみ簡単に触れることにする. 詳しい議論については, 例えば Bondesson (1979), Jørgensen (1982) などを参照されたい.

$\alpha > 0$  と  $X \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  に対して  $Y := X^{1/\alpha}$  と定義する時,  $Y$  の分布 (powered generalized inverse Gaussian distribution;  $PGIG$  分布) の密度関数は (4.1) より

$$(4.35) \quad p_{PGIG}(y) := \frac{\alpha(\gamma/\delta)^\lambda}{2K_\lambda(\delta\gamma)} y^{\alpha\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{y^\alpha} + \gamma^2 y^\alpha\right)\right\}, \quad y > 0,$$

となる. 勿論 (4.35) は  $\alpha = 1$  の時  $GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  となるのであるが, それ以外の場合にも例えば以下のような場合が極限として現れる.

一般化ガンマ ( $GI$ ) 分布. (4.35) で  $\lambda > 0$  かつ  $\delta \downarrow 0$  とすれば以下の密度関数に収束する.

$$(4.36) \quad p_{GI}(y) := \frac{\alpha(\gamma^2/2)^\lambda}{\Gamma(\lambda)} y^{\alpha\lambda-1} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2} y^\alpha\right).$$

ワイブル分布. (4.36) において更に  $\lambda = 1$  ととればよい.

上記以外にも例えば対数正規分布がある種の極限として現れる.

#### 5. $GH$ 分布

Barndorff-Nielsen (1977) は, 風で飛ばされた砂の大きさの分布を調査する目的で, 5 個のパラメーターに依存した generalized hyperbolic ( $GH$ ) 分布とよばれる  $R$  上の分布を導入した. 導

入当時の 70 年代から 80 年代後半に至るまでは主に応用の対象は気象的な様々な意味での乱流 (turbulence) であったが, 90 年代に入ってから数理ファイナンスの分野への適用が盛んとなり, 21 世紀になった今でも確率的ボラティリティ変動モデルや期間構造モデルにおいてその研究が活発になされている. 乱流への応用については, 例えば Barndorff-Nielsen (1979), Barndorff-Nielsen et al. (1985, 1990), などにおいて対象となるデータの正規性の否定と共に hyperbolic 型の分布による適合度の良さが実証されている. 他方, 近年の数理ファイナンスへの応用に関しては例えば Barndorff-Nielsen and Shephard (2001a), Bibby and Sørensen (2001), Eberlein (2001), Prause (1999), Raible (2000), Rydberg (1997, 1999) とそれらの参考文献などを参照されたい. また, Barndorff-Nielsen (1998b) は乱流とファイナンスにおけるデータ特性の類似点について議論している.

GH 分布はパラメータを動かす時のその挙動が多様であり, 特にパラメータを上手く操作することによって分布の非対称性, 裾の厚さなどを様々に変えることができる. こういった GH 分布の解析的な事項を紹介するのが本節の目的である.

### 5.1 GH 分布の定義と性質

GH 分布は GIG 分布による正規尺度平均混合, 即ち (3.1) において  $Z \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  とすることによって得られる分布として定義される (この意味で, NGIG (normal generalized inverse Gaussian) 分布とよばれることもある).  $\lambda, \delta, \gamma$  に加えて新しく 2 つのパラメータ  $\beta, \mu$  が付加されるわけであるが, 近年の数理ファイナンスへの応用においては  $\alpha := \sqrt{\gamma^2 + \beta^2} \geq 0$  なる  $\alpha$  を導入することによって  $(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  をパラメータとみなすことが多い. これは記法上の違いに過ぎないが,  $\alpha$  を導入することによって分布の形状や特徴を捉え易くなるのが時折生じるため, 本稿においてもこのパラメータ形式をとることにする.

さて (3.2) と (4.1) によって,  $GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  の密度関数は

$$(5.1) \quad p_{GH}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2} \{h(x; \delta, \mu)\}^{\lambda-1/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda-1/2} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} K_{\lambda-1/2}(\alpha h(x; \delta, \mu)) \exp\{\beta(x - \mu)\}$$

で与えられることが分かる. ここで  $h(x; \delta, \mu) := \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}$  とおいた. パラメータは  $\mu \in \mathbf{R}$ , かつ

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \lambda > 0 \text{ の時, } & \delta \geq 0, \alpha > |\beta|, \\ \lambda = 0 \text{ の時, } & \delta > 0, \alpha > |\beta|, \\ \lambda < 0 \text{ の時, } & \delta > 0, \alpha \geq |\beta|, \end{aligned}$$

をみたま. (5.2) は GIG 分布のパラメータ空間 (4.2) から自然に導かれるわけであるが, 特に重要な点として,  $\delta = 0$  と  $\gamma = 0$  の場合に関してはベッセル関数の極限を介して定義されていたということを思い出して頂きたい. ここで各パラメータの持つ大体の意味についてであるが, まず  $\lambda$  は GH 族の部分族を決定する.  $\beta$  は非対称性の度合いを表し, 各固定された  $\beta$  に対して  $\alpha$  は峰点付近での集中度 (尖り方の度合い, steepness), また同時に裾の厚さを決める.  $\delta, \mu$  は各々尺度, 位置を表す. Bibby and Sørensen (2001) に, 様々なパラメータに対する GH 分布の密度関数及び対数密度関数のグラフが載っているのを参照されたい.

$X \sim GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  の特性関数は,  $|iu + \beta| \leq \alpha$ , 即ち  $|u| \leq \alpha^2 - \beta^2$  に対して

$$(5.3) \quad \varphi_X(u) = \left\{ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (iu + \beta)^2} \right\}^{\lambda/2} \frac{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - (iu + \beta)^2})}{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} e^{iu\mu}$$

で与えられ, これから(存在を仮定したもとで)任意の次数のモーメントの陽な表現を得ることが可能である. 同様にキユムラント母関数  $\kappa_X(u)$  は

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \kappa_X(u) = & u\mu + [\log(\alpha^2 - \beta^2) - \log\{\alpha^2 - (u + \beta)\}] \\ & + \log K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - (u + \beta)^2}) - \log K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \end{aligned}$$

であり, これから特に  $j$  次キユムラントを  $\kappa_{GH,j}, j \in N$ , と書く時に平均と分散は

$$(5.5) \quad \kappa_{GH,1} = \mu + \frac{\delta^2 \beta K_{\lambda+1}(\zeta)}{\zeta K_\lambda(\zeta)}$$

$$(5.6) \quad \kappa_{GH,2} = \frac{\delta^2 K_{\lambda+1}(\zeta)}{\zeta K_\lambda(\zeta)} + \frac{\beta^2 \delta^4}{\zeta^2} \left\{ \frac{K_{\lambda+2}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)} - \left( \frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)} \right)^2 \right\}$$

で与えられる. ここで記号の簡略化のため  $\zeta := \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  と書いた. 高次のモーメント及びキユムラントに関する詳細な議論に関しては Barndorff-Nielsen and Blæsild (1981) の付録 2 を参照されたい.

以下  $X \sim GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  であるとして,  $GH$  分布族の解析的な性質を紹介していく.

1. (A.12) に従い,  $|x| \rightarrow \infty$  の時の密度関数の挙動は

$$(5.7) \quad p_{GH}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = O(|x|^{\lambda-1} \exp\{-\alpha|x| + \beta x\})$$

となる.  $\lambda, \alpha, \beta$  によってその様相は様々に変わることが分かる. この性質は *semi-heavy tail property* とよばれている. (5.7) から特に,  $\alpha > |\beta|$  であれば任意の次数のモーメントが存在するが,  $\alpha = |\beta|$  ( $\lambda < 0$ ) の時は高次のモーメントの存在は  $\lambda$  に依存することが分かる.

2.  $GH$  族はアフィン変換のもとで不変である. 即ち,  $a \neq 0$  と  $b \in R$  に対して

$$(5.8) \quad aX + b \sim GH(\lambda, \alpha/|a|, \beta/a, |a|\delta, a\mu + b)$$

となる. これは特性関数(5.3) から容易に確かめられる.

3.  $GH$  分布の構成から  $Z \sim GIG(\lambda, \delta, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$  の時  $X|Z = z \sim N(\mu + \beta z, z)$  であるわけだが, 逆に

$$(5.9) \quad Z|X = x \sim GIG\left(\lambda - \frac{1}{2}, \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}, \alpha\right)$$

が成り立つ. これは条件付密度の公式を用いて確かめられるが,  $X$  の分布の非対称性を表す  $\beta$  に無関係であることは注目すべき事実である.

4. 命題 3.1 の 3 により, 全ての  $GH$  分布は自己分解可能(従って無限分解可能)である. よって命題 2.3 によって全ての  $GH$  分布は単峰である. 特に  $GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  の峰点  $m_{GH}$  は以下の  $x$  に関する方程式の(一意的な)解となる.

$$(5.10) \quad \alpha(x - \mu)K_{\lambda-3/2}(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}) = \beta\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}K_{\lambda-1/2}(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}).$$

一般にこの方程式は陽に解けないが, 例外として  $\lambda = 1$  の場合がある(以下の第 5.2.4 節参照). また, 分布の非対称性の影響によって  $m_{GH}$  は必ずしも平均と等しくないことに注意したい.

5.  $E[X] < \infty$  の時を考えよう. レビイ-ヒンチン表現は  $g(z)$  をレビイ密度関数として

$$(5.11) \quad \varphi_X(u) = \exp\left\{iu\kappa_{GH,1} + \int_R (e^{iuz} - 1 - iuz)g(z)dz\right\}$$



の形になり(例えば Raible(2000), Proposition 2.14 参照), GH 分布のガウス部分は退化していることが分かる. 即ち  $L_1 \sim GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  であるレヴィ過程  $L$  はその確率変動が跳びによってのみ記述されるものである. ここで  $g(z)$  は以下の正確な表現を持つ.

$$(5.12) \quad g(z) = \begin{cases} \frac{e^{\beta z}}{|z|} \left( \int_0^\infty \frac{\exp(-\sqrt{2y + \alpha^2}|z|)}{\pi^2 y \{J_\lambda^2(\delta\sqrt{2y}) + Y_\lambda^2(\delta\sqrt{2y})\}} dy + \lambda e^{-\alpha|z|} \right), & \lambda \geq 0 \text{ の時,} \\ \frac{e^{\beta z}}{|z|} \int_0^\infty \frac{\exp(-\sqrt{2y + \alpha^2}|z|)}{\pi^2 y \{J_{-\lambda}^2(\delta\sqrt{2y}) + Y_{-\lambda}^2(\delta\sqrt{2y})\}} dy, & \lambda < 0 \text{ の時.} \end{cases}$$

(5.12) の表現を得るには命題 3.2 を直接用いればよい. ここで Raible(2000) は特性関数を特定の条件下で微分していく方法によって (5.12) を導いているが, 上記の通り命題 3.2 を用いて計算する方が簡潔であり, 実際, 後者のやり方は多次元の場合にも全く同様にして適用され得る (c.f. Masuda(2002)).

$\rho(z) := z^2 g(z)$  に対して, Raible(2000) は  $|z| \downarrow 0$  の時の次の漸近的關係を見出した.

$$(5.13) \quad \rho(z) = \frac{\delta}{\pi} + \frac{\lambda + 1/2}{2} |z| + \frac{\delta\beta}{\pi} |z| + o(|z|).$$

(5.13) によって  $\int g(z) dz = \infty$  であり, 即ち上記のレヴィ過程  $L$  は任意の有限時間区間において無数の小さな跳びを持ち, 複合ポアソン過程のみでは表現され得ない. また特に  $L$  は (ウィーナー過程のように) 非有界変動を持つことも従う.

6.  $\alpha > 0$  とする. 以下の  $\xi, \chi$  は  $0 \leq |\chi| < \xi < 1$  をみたすことから shape triangle とよばれている.

$$(5.14) \quad \xi := \frac{1}{\sqrt{1 + \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}}, \quad \chi := \frac{\beta}{\alpha} \xi.$$

性質 2 により,  $\xi$  と  $\chi$  はアフィン変換のもとで不変であることが分かる. shape-triangle は GH 分布のグラフの形状を視覚的に捉えたい時に有効である.

7. (5.3) より, GH 族は以下の合成積公式をみたすことが確かめられる.

$$(5.15) \quad GH(-1/2, \alpha, \beta, \delta_1, \mu_1) * GH(-1/2, \alpha, \beta, \delta_2, \mu_2) = GH(-1/2, \alpha, \beta, \delta_1 + \delta_2, \mu_1 + \mu_2),$$

$$(5.16) \quad GH(\lambda_1, \alpha, \beta, 0, \mu_1) * GH(\lambda_2, \alpha, \beta, 0, \mu_2) = GH(\lambda_1 + \lambda_2, \alpha, \beta, 0, \mu_1 + \mu_2),$$

$$(5.17) \quad GH(-\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu_1) * GH(\lambda, \alpha, \beta, 0, \mu_2) = GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu_1 + \mu_2).$$

GH 分布からの i.i.d. データに基づいた最尤推定に関しては例えば Prause(1999) とその参考文献を参照されたい (冒頭で触れた通り, 既に対応する計算機用プログラムが存在する).

## 5.2 特別な場合として現れる分布

ここでは GH 分布からパラメーター操作によって派生する様々な分布について見ていく.

### 5.2.1 正規分布

(4.25) を思い出せば, GH 分布の構成と正規尺度平均混合の意味によって,  $\delta \rightarrow \infty$  かつ  $\alpha \rightarrow \infty$  なる極限操作を許される GH 分布族は極限の意味で正規分布を含んでいることは自然に期待されることであろう. 実際 (3.2) において  $\beta = 0$  かつ  $Z \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  とし, 次に  $\delta/\gamma \rightarrow c \in (0, \infty)$  となるように  $\delta, \gamma \rightarrow \infty$  とすればその極限として  $N(\mu, c)$  の密度関数を得ることができる. 即ち  $p_N(\cdot; \mu, c)$  で  $N(\mu, c)$  の密度関数を表す時, 任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$(5.18) \quad p_{GH}(x; \lambda, \alpha, 0, \delta, \mu) \rightarrow p_N(x; \mu, c)$$

が  $\delta/\alpha \rightarrow c$  となるように  $\delta, \alpha \rightarrow \infty$  とした時に成り立つ ( $\beta = 0$  の時は  $\gamma = \alpha$  であることに注意). 応用の対象によっては, このように正規分布を極限として含んでいることは有益であることがあり, 実際, 数理ファイナンスにおける長期間の asset return の分布の近似的な正規性 (長期間を対象とした時のブラック-ショールズモデルの有用性) などはその一例である.

### 5.2.2 GIG 分布

$GH$  分布はパラメーターに関して漸近的な意味で  $GIG$  分布を含んでいることを見ていこう. (5.1) において  $\psi = \alpha + \beta$ ,  $\varrho = \alpha - \beta$ ,  $\mu = 0$  とすると  $GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  の密度関数は以下のように書き換えられる.

$$(5.19) \quad p_{GH}(x; \lambda, \psi, \varrho, \delta) = \frac{(\psi\varrho)^{\lambda/2} \{k(x; \delta)\}^{\lambda-1/2}}{\sqrt{2\pi} u^{\lambda-1/2} \delta^\lambda K_\lambda(\delta\sqrt{\psi\varrho})} K_{\lambda-\frac{1}{2}}(uk(x; \delta)) \exp(vx).$$

ここで記号の簡単な為,  $k(x; \delta) := \sqrt{\delta^2 + x^2}$ ,  $u := (\psi + \varrho)/2$ ,  $v := (\psi - \varrho)/2$  とおいた. この表現において  $\psi\delta^2 \rightarrow c \geq 0$  となるように  $\psi \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  とすれば (5.19) は  $GIG(\lambda, \sqrt{c/2}, \sqrt{2\varrho})$  の密度関数へ収束する (ここで  $\delta \rightarrow 0$  なる極限をとるため (5.2) により暗黙のうちに  $\lambda > 0$  が課されることに注意). 実際にこれを確かめるのは多少面倒であるが,  $x \geq 0$  と  $x < 0$  の場合に分けて考えると示し易い. 用いるベッセル関数の性質は (A.12) のみである.

### 5.2.3 非対称 Student- $t$ 分布

$\delta > 0$ ,  $\lambda < 0$ ,  $\alpha = |\beta|$ , 及び  $\beta, \mu \in \mathbf{R}$  なる特別な場合に対して, 非対称 Student- $t$  分布は

$$(5.20) \quad p_{as(t)}(x; \lambda, \beta, \delta, \mu) := \int_0^\infty p_N(x; \beta z + \mu, z) p_{IG}(z; \lambda, \delta^2/2) dz$$

で定義される. その名の通り (5.20) は通常の尺度化された Student- $t$  分布に非対称性を加味したものである. ここで  $\alpha = |\beta|$  ととっているのでパラメーターから  $\alpha$  をはずした.  $\nu := -2\lambda > 0$  (自由度に対応) と書いて,

$$(5.21) \quad p_{as(t)}(x; \nu, \beta, \delta, \mu) = \frac{\delta^\nu e^{\beta(x-\mu)} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) K_{\frac{\nu+1}{2}}(|\beta|\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2})}{2^{(\nu-1)/2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \{\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}/|\beta|\}^{(\nu+1)/2}}$$

を得る. 特に (5.21) において  $|\beta| \rightarrow 0$  とすれば以下の尺度化された Student- $t$  分布を得る.

$$(5.22) \quad p_{s(t)}(x; \nu, \delta, \mu) := \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\delta \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left\{ 1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2 \right\}^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

更に (5.22) において  $\mu = 0$ ,  $\delta = \sqrt{\nu}$  とすれば, 最も典型的な自由度  $\nu$  の Student- $t$  分布の密度関数の形

$$(5.23) \quad p_{(t)}(x; \nu) := \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

に帰着される.

### 5.2.4 $H$ 分布

Hyperbolic ( $H$ ) 分布  $H(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  は  $GH(1, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  で定義される,  $GH$  分布に真に包含さ

れた分布であり, その密度関数は

$$(5.24) \quad p_H(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) := \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp\{\beta(x - \mu) - \alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\}$$

で与えられる. 特に対称な場合 ( $\beta = 0$  の時) 対数密度関数が双曲線であることから hyperbolic の名が付いている. 実際 (5.7) により,  $p_H(x; \alpha, \beta, \delta, \mu)$  の裾での挙動は

$$(5.25) \quad p_H(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = O(\exp(\beta x - \alpha|x|))$$

であり, 対数密度関数は裾へ向かって線形的に減少することが分かる. Bibby and Sørensen (2001) において, 様々な shape triangle の値に対する  $H$  分布の対数密度関数のグラフが与えられているので参照されたい.

$H$  分布は次節で紹介する  $NIG$  分布と共に, 90 年代に入ってから急速に数理ファイナンスへ応用されるようになった. これら 2 つの分布は  $GH$  分布の部分族として数理ファイナンスへの応用が特に顕著になされているため, それらの比較を込めて他の分布より少し詳しく紹介していくことにする.  $H$  分布の数理ファイナンスへの応用に関する論文としては, 例えば Küchler et al. (1999), Bibby and Sørensen (1997), Eberlein and Keller (1995), Eberlein and Raible (1999) などを参照されたい. 特に Küchler et al. (1999) においては, German stocks return の日次データに対する  $H$  分布の適合度の良さが立証されている.

(A.7) を用いて,  $H(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  の峰点  $m_H$  は以下の通り簡単な表示を持つことが分かる.

$$(5.26) \quad m_H = \mu + \frac{\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}.$$

$H(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  の特性関数は (5.3) より直ちに

$$(5.27) \quad \varphi_H(u) = e^{i\mu u} \frac{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2})}{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + iu)^2}}$$

と分かるが, これにより  $H$  分布は合成積のもとで閉じていないことが分かる. よって  $L_1 \sim H(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  なるレヴィ過程の  $L_t, t \in \mathbf{R}_+$ , の分布の密度関数  $p_{H,t}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu)$  は次のようにフーリエ変換公式によって求まることになる.

$$(5.28) \quad p_{H,t}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-iux} \{\varphi_H(u)\}^t du.$$

従って特に

$$(5.29) \quad p_{H,t}(x; \alpha, 0, \delta, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(ux) \{\varphi_H(u)\}^t du$$

である(勿論 (5.29) の  $\varphi_H(u)$  は  $\beta = \mu = 0$  に対応するもの)(5.28) もしくは (5.29) は数値的に求めることになる.

平均及び分散は各々 (5.5) (5.6) でそのまま  $\lambda = 1$  としたものであり, ベッセル関数が残る形になる.

$H(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  のパラメーターに関する極限操作で幾つかのよく知られた分布が現れるので, 一般の  $GH$  分布の段階で触れた分布も含めてそれらを列挙する. ここで (5.2) に従い,  $\delta \downarrow 0$  なる操作は許されるが  $\alpha - |\beta| \downarrow 0$  は許されないことに注意したい.

正規分布.  $\beta = 0$  とし,  $\delta/\alpha \rightarrow c \in (0, \infty)$  なる制約のもとで  $\alpha, \delta \rightarrow \infty$  とすれば (5.24) は  $N(\mu, c)$  の密度関数へ収束する(実際何らかのグラフィックツールで  $H$  分布の密度関数を描く時, 大体  $\alpha = \delta = 10$  くらいで十分標準正規密度関数に近いことが視覚的に分かる).

$PH$  分布 . これは既に見た第 5.2.2 節の内容において  $\lambda = 1$  とすればよい . 極限として , パラメーター  $(\sqrt{c/2}, \sqrt{2(\alpha - \beta)})$  を持つ  $PH$  分布が得られる .

非対称ラプラス分布 . (5.24) で  $\delta \downarrow 0$  としたものに対応する . 得られる密度関数は

$$(5.30) \quad p_{AL}(x; \alpha, \beta, \mu) := \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} \exp\{\beta(x - \mu) - \alpha|x - \mu|\}$$

であり , 特に  $\beta = 0$  の時は通常のラプラス分布である .

指数分布 . 第 4.2 節で既に触れた通り上記の  $PH$  分布の特別な場合 ( $c \downarrow 0$ ) であり , そのパラメーターは  $\alpha - \beta (> 0)$  である .

特に  $H$  分布の場合 ,  $GH$  分布の性質 6 で触れた shape-triangle の  $\xi$  と  $\chi$  は各々尖度と非対称度の適切なパラメーターであることが経験的に確かめられている . 詳細は Barndorff-Nielsen et al. (1985) を参照されたい .

### 5.2.5 NIG 分布

Normal inverse Gaussian ( $NIG$ ) 分布は  $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu) = GH(-1/2, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  によって定義される分布であり , その密度関数は

$$(5.31) \quad p_{NIG}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi} \exp\{\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\} \frac{K_1(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}}$$

で与えられる ( $IG$  分布による正規尺度平均混合であることから normal inverse Gaussian の名が付いたものと思われる) .  $H$  分布の時と同様に , Bibby and Sørensen (2001) には  $NIG$  分布の対数密度関数のグラフが様々な shape-triangle の値に対して与えられている . ところで第 4.2 節において  $IG$  分布の , ずれを持つウィーナー過程の初到達時間の分布としての解釈に触れたが ,  $NIG$  分布はその類似として以下の解釈を持つことを注意しておきたい :  $W^{(1)}$  をずれ  $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  , 正規分散 1 を持つウィーナー過程 ,  $W^{(2)}$  をずれ  $\beta$  , 正規分散 1 を持つ  $W^{(1)}$  と独立なウィーナー過程としよう ( $W_0^{(1)} = W_0^{(2)} = 0$ ) . また , 各  $t > 0$  に対して停止時  $Z(t) := \inf\{s > 0 : W_s^{(1)} = \delta t\}$  を定義する . この時

$$(5.32) \quad L_t := \mu t + W_{Z(t)}^{(2)}$$

なる確率過程  $L$  はレヴィ過程であり , 各  $t > 0$  に対して  $L_t \sim NIG(\alpha, \beta, \delta t, \mu t)$  となる . この最後の式は以下で見る  $NIG$  分布の再生性からも直ちに従う .

(5.7) により ,  $p_{NIG}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu)$  の裾での挙動は

$$(5.33) \quad p_{NIG}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = O(|x|^{-3/2} \exp\{\beta x - \alpha|x|\})$$

である .  $NIG$  分布は  $H$  分布と比べて数学的に扱い易い点が多く , モーメントの構造はその一つである . 即ち  $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  に対しては

$$(5.34) \quad \kappa_{NIG}(u) = u\mu + \delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (u + \beta)^2})$$

となり , ベッセル関数が現れない . また (5.34) から  $NIG$  は以下の再生性を有することが直ちに分かる : 独立な  $n$  個の確率変数  $X_j \sim NIG(\alpha, \beta, \delta_j, \mu_j)$  ,  $j = 1, 2, \dots, n$  , に対して

$$(5.35) \quad \sum_{j=1}^n X_j \sim NIG\left(\alpha, \beta, \sum_{j=1}^n \delta_j, \sum_{j=1}^n \mu_j\right).$$

これは既に見た (5.15) に他ならない . この性質は , 例えば  $NIG$  分布に対応したレヴィ過程のサンプルパスを発生させることが必要なシミュレーションなどにおいて非常に有益である .

さて (5.34) より特に 4 次までのキュムラント  $\kappa_{NIG,j}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  は

$$\begin{aligned}\kappa_{NIG,1} &= \mu + \frac{\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, & \kappa_{NIG,2} &= \frac{\alpha^2\delta}{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^3}, \\ \kappa_{NIG,3} &= \frac{3\alpha^2\beta\delta}{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^5}, & \kappa_{NIG,4} &= \frac{3\alpha^2\delta(\alpha^2 + 4\beta^2)}{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^7},\end{aligned}$$

と計算され, これらから  $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  の歪度と尖度は各々

$$(5.36) \quad 3\beta\{\alpha\sqrt{\delta}(\alpha^2 - \beta^2)^{1/4}\}^{-1}, \quad 3(\alpha^2 + 4\beta^2)(\alpha^2\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^{-1}$$

となる. また,  $X \sim NIG(\alpha, 0, \delta, 0)$  の時,  $X$  の偶数次のモーメント(奇数次は全て 0)の表示が更に簡略化される. 特に最初の 3 つは以下の通りである.

$$E[X^2] = \frac{\delta}{\alpha}, \quad E[X^4] = \frac{3\delta}{\alpha^2} \left( \delta + \frac{1}{\alpha} \right), \quad E[X^6] = \frac{15\delta}{\alpha^3} \left( \delta^2 + \frac{3\delta}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} \right).$$

$NIG$  分布の特別な極限として現れるよく知られた分布としては, 以下の 2 つのものが挙げられる.

正規分布.  $H$  分布の時と全く同様なパラメータ操作で現れる( $H$  分布の時と同様に, 大体  $\alpha = \delta = 10$  でほぼ標準正規密度関数に重なる).

尺度化された対称なコーシー分布.  $\alpha \downarrow 0$  (この時, 自動的に  $|\beta| \downarrow 0$  となる)とすれば (5.31) は密度関数

$$(5.37) \quad p_C(x; \delta, \mu) := \frac{\delta}{\pi\{\delta^2 + (x - \mu)^2\}}.$$

へ収束する.

ところで, Barndorff-Nielsen (1997) は  $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  の以下の通り正確なレヴィー-ヒンチン表現を計算した:

$$(5.38) \quad \varphi_{NIG}(u) = \exp \left\{ i(\gamma + \mu)u + \int_{\mathbf{R}} (e^{iuz} - 1 - iu1_U(z))f(z; \alpha, \beta, \delta)dz \right\}.$$

ここで  $\gamma$  と  $f(z; \alpha, \beta, \delta)$  は各々

$$(5.39) \quad \gamma = \frac{2\alpha\delta}{\pi} \int_0^1 \sinh(\beta x) K_1(\alpha|x|) dx,$$

$$(5.40) \quad f(x; \alpha, \beta, \delta) = \frac{\alpha\delta}{\pi|x|} e^{\beta x} K_1(\alpha|x|)$$

で与えられる. 特に  $\alpha > |\beta|$  の場合(コーシー分布以外の場合)には任意の次数のモーメントが存在するため, (5.38) は以下の形に書き換えることができる.

$$(5.41) \quad \varphi_{NIG}(u) = \exp \left\{ i\kappa_{NIG,1}u + \int_{\mathbf{R}} (e^{iuz} - 1 - iuz)f(z; \alpha, \beta, \delta)dz \right\}.$$

更にレヴィ密度関数  $f$  については (A.8) と (A.12) を適用することで以下の漸近挙動が従う.

$$(5.42) \quad f(x; \alpha, \beta, \delta) = O(|x|^{-2}), \quad |x| \downarrow 0 \text{ の時},$$

$$(5.43) \quad f(x; \alpha, \beta, \delta) = O(|x|^{-3/2} \exp\{\beta x - \alpha|x|\}), \quad |x| \uparrow \infty \text{ の時}.$$

以上から,  $H$  分布と比べて  $NIG$  分布は多くの面において解析的に扱い易いことが観察できたとする. 以下の Barndorff-Nielsen (1998b) からの引用を紹介しておきたい:

By suitable choice of the dominating parameters, the NIG distribution can be made to look essentially as any H distribution so that any statistical result of applying the latter can be incorporated in reanalysis based on the former.

最後に, NIG 分布はその乱数を生成させ易いという利点を持つことについて言及しておこう.

命題 5.1. (NIG 乱数の生成, Raible(2000)) 以下の手順で  $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  の乱数を生成できる.

手順 1.  $U_1, U_2$  及び  $U_3$  を互いに独立な  $[0, 1]$  上の一様分布にとり, ボックス-ミュラー変換で 2 つの独立な標準正規乱数  $N_1, N_2$  を作る:

$$N_1 := \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2), \quad N_2 := \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2).$$

手順 2.  $V := N_1^2 \sim \chi^2(1)$  に対して

$$(5.44) \quad V = (\gamma Z - \delta)^2 Z^{-1}$$

とおく. ここで  $\gamma := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  である.  $\gamma = 0$  の時は  $z := \delta^2 V^{-1}$  として手順 4 へ進む(この場合  $z$  はレヴィ分布に従う). 一方,  $\gamma > 0$  の時は(5.44)を  $Z$  について解いた時の 2 つの解を

$$z_1 := \left( \frac{\delta}{\gamma} + \frac{V}{2\gamma^2} \right) - \sqrt{\frac{V\delta}{\gamma^3} + \left( \frac{V}{2\gamma^2} \right)^2}, \quad z_2 := \frac{1}{z_1} \left( \frac{\delta}{\gamma} \right)^2$$

とし, 手順 3 へ進む.

手順 3.  $q := \delta(\delta + \gamma z_1)^{-1}$  とし,  $z$  を  $U_3$  の値によって以下のように定義する.

$$z = \begin{cases} z_1, & U_3 < q \text{ の時,} \\ z_2, & \text{上記以外の時.} \end{cases}$$

この時  $z \sim IG(\delta, \gamma)$  となる.

手順 4. 以下で定義される  $X$  の分布は  $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  に従う.

$$(5.45) \quad X := \mu + \beta z + \sqrt{z} N_2.$$

特に  $\gamma = 0$  であれば  $X$  は密度関数(3.8)を持つ非対称コーシー分布の乱数に対応し, 更に  $\beta = 0$  であれば  $X$  は密度関数(5.37)を持つコーシー分布の乱数に対応する.

命題 5.1 における手順においても, NIG 分布の正規尺度平均混合の観点からの定義が重要な意味を持つことが示唆されているわけである.

注意 5.1. 先に触れた通り, 命題 5.1 を用いて  $L_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  なるレヴィ過程  $L = (L_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  のサンプルパスを簡単に(十分細かい発生時間幅をもって近似的に)発生させることができる. これは勿論, レヴィ過程の独立定常増分を持つという性質, 及び NIG 分布の再生性による.

注意 5.2. NIG 分布の様々な解析的に有益な点(特性関数及びモーメントの構造の簡単さ, 再生性, レヴィ測度の簡単さ等)を引き継ぎつつ, その拡張となっている分布として, 近年 Barndorff-Nielsen and Shephard(2001c)で扱われた NTS(normal tempered stable)分布という

ものがある．本稿では取り扱わないが， $NTS$  分布は大雑把には指数  $\kappa$  ( $0 < \kappa < 1$ ) を持つ正の安定分布からある操作によって派生する  $TS$  (tempered stable) 分布とよばれるものによる正規尺度平均混合で定義される分布である． $NTS$  分布は特別な場合として  $NIG$  分布や後節で簡単に紹介する  $NG$  分布を含んでおり，上記に挙げた  $NIG$  分布の解析上の有益な点は全てそのまま維持しつつ自己分解可能性をも有する分布である．ただ， $NTS$  分布それ自体の密度関数は一般には級数表現を含んだ形でしか表現できない，という一面も持っているということに注意しておきたい．一つの興味ある点として， $GIG$  分布と  $TS$  分布の間の包含関係が挙げられると思うが，これについては筆者の知る限りでは明らかになっていないようである．

### 5.2.6 $H$ 分布と $NIG$ 分布の比較

$H$  分布と  $NIG$  分布は解析的にどのような相違を持つのか? というのは興味ある点であると思う．Raible (2000) はこれについて幾つかの結果を提示したが，ここでは特に密度関数の挙動の観点から 2 つの事項を述べる．

(a)  $\beta = \mu = 0$  の場合での裾の挙動の範囲

$\beta = \mu = 0$  に加え，分散  $v$  が固定されているとしよう．この時， $H$  分布の場合については  $\zeta := \alpha\delta$  ( $0 < \zeta < \infty$ ) とおいたもとの

$$\alpha = \sqrt{\frac{\zeta K_2(\zeta)}{v K_1(\zeta)}}$$

が成り立つ．(A.8)より  $\zeta \downarrow 0$  ( $\delta \downarrow 0$ ) の時

$$\frac{\zeta K_2(\zeta)}{v K_1(\zeta)} \downarrow \frac{2}{v}$$

であり，即ち  $\alpha$  は各  $v$  に対して下限  $\sqrt{2/v}$  を持つことが分かる．これにより， $H$  分布の裾の減少の速さは下限を持つことが従う (各固定された  $\delta$  に対しては，より小さい  $\alpha$  が厚い裾を呈するのであった)．一方  $NIG$  分布の場合，分散  $v$  は  $\delta/\alpha = v$  を意味し，これより裾の厚さの度合いを決定する  $\alpha$  は  $\delta = v\alpha$  のもとの任意にとれることが分かる．以上により，与えられた分散を持つという条件のもとで  $NIG$  分布の  $\infty$  での漸近挙動は  $H$  分布のそれよりも幅広いと結論付けられる．

(b)  $\beta = \mu = 0$  の場合での対数密度関数の形

$H$  分布の対数密度関数は全域で concave である．他方， $NIG$  分布の対数密度関数の場合は  $|x| \downarrow 0$  に対して漸近的に

$$(\text{定数}) - \log(\delta^2 + x^2),$$

また  $|x| \uparrow \infty$  に対して漸近的に

$$(\text{定数}) - \frac{3}{4} \log(\delta^2 + x^2) - \alpha \sqrt{\delta^2 + x^2}$$

となり， $|x|$  が十分小さい時 concave，十分大きい時 convex であることが確認できる．

図 2 は，標準正規分布， $H$  分布及び  $NIG$  分布の対数密度関数を比較したものであり，各々分散は 1 としてある (ただし， $H$  分布については近似的なパラメータの値を用いている)．

### 5.2.7 $NG$ 分布と $VG$ 分布

$NG$  (normal Gamma) 分布  $NG(\lambda, \alpha, \beta, \mu)$  は  $GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  で  $\lambda > 0$  かつ  $\delta \downarrow 0$  とした場合 ( $\alpha > |\beta|$ ) での極限分布として，即ちガンマ分布による正規尺度平均混合として定義される．更

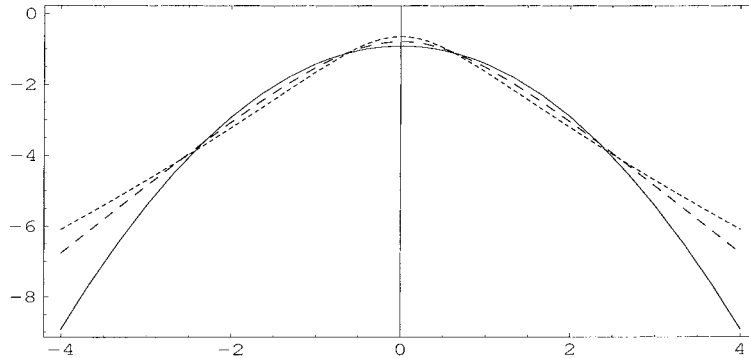


図 2.  $N(0, 1)$  分布(実線),  $H(2, 0, 1.19337, 0)$  分布(粗い点線)と  $NIG(1, 0, 1, 0)$  分布(細かい点線)の対数密度関数の比較: 全て分散を 1 としてある.

に  $\beta = 0$  の場合は  $VG$  (variance Gamma) 分布とよばれ, 既に stock-return のモデルやそれに対応した option-pricing 等, 数理ファイナンスで応用例が見られる. 関連する論文の一例として, Madan et al. (1998) を挙げておこう.

$NG(\lambda, \alpha, \beta, \mu)$  の密度関数は

$$(5.46) \quad p_{NG}(x; \lambda, \alpha, \beta, \mu) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^\lambda e^{\beta(x-\mu)}}{\sqrt{\pi}(2\alpha)^{\lambda-1/2} \Gamma(\lambda)} |x - \mu|^{\lambda-1/2} K_{\lambda-1/2}(\alpha|x - \mu|).$$

で与えられ, これより直ちに

$$(5.47) \quad \varphi_{NG}(u) = e^{i\mu u} \left\{ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} \right\}^\lambda$$

と計算できる. 特に (5.47) より以下の形の再生性が従うことが分かる.

$$(5.48) \quad NG(\lambda_1, \alpha, \beta, \mu_1) * NG(\lambda_2, \alpha, \beta, \mu_2) = NG(\lambda_1 + \lambda_2, \alpha, \beta, \mu_1 + \mu_2).$$

我々は, 例 3.2 において既にこの分布を扱っており,  $NG(\lambda, \alpha, \beta, \mu)$  のレヴィ密度関数  $h(x)$  は

$$(5.49) \quad h(x) = \frac{\lambda}{|x|} \exp(\beta x - \alpha|x|)$$

で与えられることが分かる. またモーメントの構造も簡単であり, 特に平均と分散は各々

$$(5.50) \quad \mu + \frac{2\lambda\beta}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \frac{2\lambda(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)^2}$$

で与えられる. また (5.46) において  $\lambda = 1$  かつ  $\delta \downarrow 0$  とすれば非対称ラプラス分布 (5.30) の密度関数が得られる. Bibby and Sørensen (2001) に  $VG$  分布の対数密度関数のグラフが載っているので参照されたい.

**注意 5.3.**  $GH$  分布の数多い部分族のうち,  $NIG$  分布と  $NG$  分布のみが再生性を有することが知られている. 共に混合要素 ( $IG$  分布とガンマ分布) の時点で既に再生性を持っていることに注意したい.



## 6. 1次元オルンシュタイン-ウーレンベック型過程

本節では、あらゆる自己分解可能分布、従って GIG 分布と GH 分布は、ある確率過程の不変分布として特徴付けられるということを紹介する。

$q$  を任意の正定数、 $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  を原点から出発する 1 次元レヴィ過程で特性量  $(b_Z, C_Z, \nu_Z)$  を持つものとし、マルコフ過程  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  を

$$(6.1) \quad X_t = e^{-qt} X_0 + \int_0^t e^{-q(t-s)} dZ_s$$

を定義しよう。ここに  $X_0$  は  $Z$  と独立な確率変数であり (6.1) の右辺第 2 項の確率積分は、各  $t > 0$  に対してある種の確率収束の極限として定義することができる (Sato and Yamazato (1983) 参照)。この  $X$  はオルンシュタイン-ウーレンベック型過程 (以下 OU 過程と略す) とよばれるものであり、跳びを持つ拡散過程の極めて特殊なものに過ぎないが、幾つかの特別な性質を有する (6.1) は確率微分方程式

$$(6.2) \quad dX_t = -qX_t dt + dZ_t$$

の一意的な強い解としても定義でき、特に  $Z$  が (ずれを持ってよい) ウィーナー過程であれば、よく知られた正規型の (平均回帰) OU 過程に帰着される。この場合 (6.1) の  $X_t$  はその  $t \rightarrow \infty$  での極限分布として正規分布を持つことを思い出して頂きたい。以下の命題は、“ $Z$  が一般のレヴィ過程に拡張された場合、対応する OU 過程の可能な極限分布全体は如何なる族を成すか?” という問いに対する完全な解答を与えている。

命題 6.1. (OU 過程の不変分布としての自己分解可能分布)  $X$  を (6.1) で与えられた OU 過程とし、

$$(6.3) \quad \int_{|z|>1} \log |z| \nu_Z(dz) < \infty$$

を仮定する。この時、任意の  $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$  に対してある自己分解可能な分布  $F$  が存在し、 $t \rightarrow \infty$  の時

$$(6.4) \quad P(t, x, A) \rightarrow F(A)$$

が任意の  $A \in \mathcal{B}_1$  (1 次元 Borel  $\sigma$ -field) に対して成り立つ。ここで  $P(t, x, A) = P(X_t \in A | X_0 = x)$  は  $X$  の遷移確率を表す。逆に任意の 1 次元自己分解可能分布に対してある  $(b_Z, C_Z, \nu_Z)$  が 1 対 1 に対応して存在し、任意の  $x_0 \in \mathbb{R}$  に対して (6.4) が成り立つ。

一方、 $Z$  が (6.3) を満たさない時は、如何なる  $x_0$  に対しても  $X_t$  の分布は  $t \rightarrow \infty$  の時確率測度に収束しない。

(6.4) は通常の分布収束よりも強い収束を言っていることに注意して頂きたい。また (6.3) は大雑把には  $Z$  の大きな跳びがあまり頻繁に生じないような状況を意味する。命題 6.1 は Sato and Yamazato (1984) の結果であり、そこでは極限分布の特性量も (多次元の枠組みで) 明確に与えられている。関連した論文として Sato and Yamazato (1983), Wolfe (1982) を挙げておこう。特に後者は 1 次元の場合のみを扱った議論がなされており、読み易い。また、自己分解可能分布に従う確率変数の確率積分による表現 (大雑把には、自己分解可能分布をあるレヴィ過程に関する確率積分で分布同等に表現すること) も命題 6.1 に重要な解釈を与える。この詳細には触れないが、例えば Jurek and Vervaat (1983) または Jurek and Mason (1993) の 3.6 節を参

照されたい。また, Barndorff-Nielsen(1998a)の 2.3 節においてもこの事柄を簡潔に述べたサーベイがなされている。GIG 分布及び GH 分布は共に自己分解可能なので, 命題 6.1 によって各々を不変分布を持つような OU 過程の存在は保証されたことになる。

命題 6.1 の別解釈として, Barndorff-Nielsen et al.(1998)はある事前に与えられた自己分解可能分布をその周辺分布を持つような連続時間の強定常確率過程としての OU 過程について議論した。そこでは事前に与えられた各自己分解可能分布  $F$  に対し,  $X_0$  が  $F$  に従うもとの  $Z$  をどう与えれば  $X$  自身  $F$  を定常分布を持つ強定常過程になり得るか, といった話題が扱われている。特にここでは  $q > 0$  に依らない自己分解可能分布  $F$  に対して  $X_0 \sim F$  であるもとの (6.1) において  $Z$  の時間尺度を変えた

$$(6.5) \quad X_t = e^{-qt} X_0 + \int_0^t e^{-q(t-s)} dZ_{qs}$$

で定義される  $X$  は  $q$  に依存した  $Z$  によって時間発展していくにも関わらず, 任意の  $t \in \mathbf{R}_+$  に対して  $X_t \sim F$  となることが示されている。つまり,  $X$  が時間発展していく上で (6.5) の右辺第 1 項の  $q$  の影響が右辺第 2 項のそれと相殺するような状況が生じるのである。また (6.5) を用いれば, 簡単な計算から強定常な  $X$  の自己相関関数は  $Z$  に依らず常に  $r_X(t) = \exp(-qt)$  で与えられることが分かる。冒頭でも触れた通り, 近年 Barndorff-Nielsen and Shephard(2001a)によって OU 過程の数理ファイナンスへの具体的な応用が実証分析を込めて発表され, そこで様々な研究者との間で議論がなされている。OU 過程の統計への応用例として興味深い論文であるといえよう。

強定常な OU 過程に関する, 実用上便利な結果を一つ紹介しておこう。詳しくは例えば Barndorff-Nielsen(1998a)を参照されたい。

命題 6.2. (定常分布  $F$  と  $Z$  のレヴィ密度関数の関係) (6.5) の  $X$  が強定常であるとし,  $F$  と  $Z = (Z_{qt})_{t \in \mathbf{R}_+}$  のレヴィ密度関数の存在を仮定して各々  $f(x), g(z)$  と書く ( $g(x)$  は  $Z_1$  ( $t = 1/q$ ) の分布に対応するレヴィ密度関数であることに注意)。更に  $f(x)$  が微分可能である時, 以下の関係が成り立つ。

$$(6.6) \quad g(x) = -f(x) - x \frac{d}{dx} f(x).$$

命題 6.2 は与えられた自己分解可能分布に対して, それを定常分布とする OU 過程を駆動するレヴィ過程を確定する際に有効である(以下の例 6.1 でその一例を紹介する)。

本節では 1 次元 OU 過程の基本的な事柄のほんの一部についてのみ述べたが, その他の様々な話題, 例えば  $X$  により現実的な自己相関構造 ( $r_X(t)$  の減衰を遅くする) を与えるための重ね合わせ (superposition) (6.5) の右辺第 2 項の確率積分の乱数の級数表現 (Rosiński の理論, cf. Rosiński(2000)) などの様々な議論については Barndorff-Nielsen and Shephard(2001b)を参照されたい。また, Barndorff-Nielsen and Shephard(2001a)による確率的ポラティリティモデルの解析において重要な役割を果たす, 積分された OU 過程 (OU 過程  $X$  に対して  $\tilde{X}_t := \int_0^t X_s ds$  で定義される確率過程のこと) も OU 過程によるポラティリティモデリングの利点を提示する話題であり, 興味深い対象である。これについては Barndorff-Nielsen and Shephard(2002)において多くの具体例と共に詳しく議論されている。

注意 6.1.  $W = (W_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$  を 1 次元標準ウィーナー過程とし, 確率微分方程式

$$(6.7) \quad dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t$$

で定義される 1 次元拡散過程  $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  と OU 過程  $X$  の大きな解析上の違いについて 3 つ簡単に触れておきたい。  $Y$  は強い解を持つとは限らないが、例えば Engelbert and Schmidt (1985) による弱い解を一意的に持つような正則条件は係数  $b(\cdot)$ ,  $\sigma(\cdot)$  に課されているものとする。ある正則条件のもとで、 $X$  が事前に与えられた密度関数に対応した不変分布を持つように  $b(\cdot)$  と  $\sigma(\cdot)$  を決定する方法はよく知られている(例えば Rogers and Williams (1987) の第 5 章の 7 節参照)。サンプルパスの連続・不連続性以外の相違点として、例えば以下のものが指摘できよう。但し、これらは全て、 $X$  と  $Y$  の間の優劣関係を主張するものではないということを断っておきたい。

1. 不変分布については、 $X$  のそれは自己分解可能であるものしかあり得ない一方で、 $Y$  のそれは自己分解可能以外にもあり得る(例えばベータ分布を不変分布に持つような拡散過程は存在する)。

2.  $X$  は  $Z$  を変えることによってその不変分布を変えるので、確率微分方程式 (6.1) の形態は同じままで常に強い解を一意的に持つ。翻って  $Y$  の場合は、各不変分布に対応してその係数を適当に変えなければならない。特に OU 過程のように有界変動部分を線形に維持したとしても、一般には対応する拡散係数は非線形になることが殆どであり、強い解を持たない場合が生じ得る。

3. 拡散過程  $Y$  の場合は一般に解の陽な表示を得ることが難しく、従って遷移密度関数が解析的に非常に扱いにくい、OU 過程  $X$  の場合は少なくとも遷移確率の特性関数までは常に明確化できる。

例 6.1. (6.5) の具体例として定常分布  $IG(\delta, \gamma)$  を持つ OU 過程を紹介しよう。ここでの興味の対象は対応するレヴィ過程  $Z$  は具体的に何者なのか? という点にあり、命題 6.2 の有用性を見ることが主目的である。

$IG(\delta, \gamma)$  のレヴィ密度関数は存在し、実際それは (4.34) で  $\lambda = -1/2$  とした

$$(6.8) \quad f(x) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp\left(-\frac{\gamma^2 x}{2}\right), \quad x > 0$$

で与えられる。  $f(x)$  の微分可能性より (6.6) を用いて

$$(6.9) \quad g(x) = \left\{ \frac{\delta/2}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp\left(-\frac{\gamma^2 x}{2}\right) \right\} + \left\{ \left(\frac{\delta\gamma}{2}\right) \frac{(\gamma^2/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} x^{-1/2} \exp\left(-\frac{\gamma^2 x}{2}\right) \right\}$$

となり、 $Z$  は以下で与えられることになる。

1.  $\gamma = 0$  の時 (6.9) の第 2 項は消え、 $Z$  はパラメーター  $\delta$  を持つレヴィ分布に対応するレヴィ過程である。

2.  $\gamma > 0$  の時、 $Z$  は  $IG(\delta/2, \gamma)$  に対応したレヴィ過程  $Z^{(1)}$  と、 $Z^{(1)}$  と独立な以下で与えられる定数倍された複合ポアソン過程  $Z^{(2)}$  の和  $Z = Z^{(1)} + Z^{(2)}$  で与えられる。

$$(6.10) \quad Z_t^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{\gamma^2} \sum_{j=1}^{N_t} x_j, & N_t \geq 1 \text{ の時,} \\ 0, & N_t = 0 \text{ の時.} \end{cases}$$

ここで  $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  は強度  $\delta\gamma/2$  を持つポアソン過程で、 $x_j, j = 1, 2, \dots$  は  $\chi^2(1)$  に従う i.i.d. 確率変数で  $N$  と独立なものである。

従って  $IG(\delta, \gamma)$  を定常分布とする OU 過程は, 時間発展と共に (6.1) の右辺第 1 項により 0 へ衰退していく一方で右辺第 2 項によって上方へのみジャンプを起こすような確率過程であることが分かる. この例では  $Z$  が複合ポアソン過程のみでは記述されないものを扱ったが,  $Z$  が複合ポアソン過程のみで表される例としては, ガンマ分布または  $NG$  分布を定常分布に持つような OU 過程が挙げられる.

## 7. おわりに

主に  $GIG$  分布と, それから正規尺度平均混合によって得られる  $GH$  分布に関する基本的な解析的事実を述べてきた. それらの無限分解可能性及び自己分解可能性により, 確率過程の駆動 (ノイズ) 過程として, また特に OU 過程の不変分布として, 特性量の観点から完全に特徴付けられる点が特に興味深い. 実際筆者もこの事実によって最初に興味を持った.  $GH$  分布に関連した多くの論文でも主張されていることであるが,  $GIG$  分布や  $GH$  分布についてはそのデータ特性への順応性の高さやある程度の数学的な扱い易さなどを踏まえ, 今後も様々な応用分野へ実際に適用されるだけの十分な潜在威力を有していると思う.

## 付 録

### A. $K_\nu(z)$ の性質

本付録では  $GIG$  分布と  $GH$  分布の解析で重要となる  $K_\nu(z)$  の性質を列挙する. これらは主に Abramowitz and Stegun (1968) の 9.6 節と 9.7 節からの引用である. 本節では  $\sim$  は各極限における同等性を表すことにする.

(K.1 積分表示)  $K_\nu(z)$ ,  $z > 0$ ,  $\nu \in \mathbf{R}$ , は以下の積分表示を持つ.

$$(A.1) \quad K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\nu-1} \exp\left\{-\frac{x}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right\} dy.$$

(A.1) から直ちに以下の関係が従う.

$$(A.2) \quad K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$$

(K.2  $\nu$  に関する漸化式) 以下の等式が成り立つ.

$$(A.3) \quad K_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} K_\nu(z) + K_{\nu-1}(z)$$

$$(A.4) \quad K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z)$$

ここで  $'$  は  $z$  に関する微分を表す. (A.3) と (A.4) より, 特に

$$(A.5) \quad K'_\nu(z) = -K_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} K_\nu(z).$$

(K.3 特別な場合の表現)  $n = 1, 2, \dots$  に対しては

$$(A.6) \quad K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^n \frac{(n+j)!}{(n-j)! j!} (2z)^{-j} \right\}$$

が成り立ち, 特に (A.2) と (A.6) から  $\nu = 1/2$  に対して

$$(A.7) \quad K_{\frac{1}{2}}(z) = K_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$$

が成り立つ .

(K.4  $z \downarrow 0$  の時の漸近展開) 固定された  $\nu > 0$  に対し,  $z \downarrow 0$  の時

$$(A.8) \quad K_\nu(z) \sim \Gamma(\nu) 2^{\nu-1} z^{-\nu},$$

が成り立つ . 特に

$$(A.9) \quad K_0(z) \sim -\log z.$$

また  $\nu < 0$  の時は

$$(A.10) \quad K_\nu(z) \sim \Gamma(-\nu) z^\nu 2^{-(\nu+1)}.$$

(K.5  $z \uparrow \infty$  の時の漸近展開)  $\mu = 4\nu^2$  に対し,  $z \uparrow \infty$  の時

$$(A.11) \quad K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{(8z)^2 2!} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{(8z)^3 3!} + \dots \right\}$$

が成り立つ . 従って最も簡単な (1 次の) 近似としては

$$(A.12) \quad K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}.$$

## B. 多次元 GH 分布

ここでは簡単に  $d$  次元 GH 分布 ( $GH_d$ ) について紹介する . これは元々 Barndorff-Nielsen (1977) が導入したものであるが, 解析及び応用を詳しく行ったのはその後の Blæsild (1981) や Blæsild and Jensen (1981) などである . パラメーターに関して 1 次元の場合と大きく異なるのは, 各要素を混ぜる (要素間の相関を形成する) 行列パラメーター  $A$  が新たに加わる点である . 特に Barndorff-Nielsen (1978) において  $h$  分布 (4.26) の多次元正規尺度平均混合で定義される hyperboloid 分布とよばれるものが言及されており, この分布に関しては後に Jensen (1981) がその von Mises-Fisher 分布との著しい関係を込めて詳しく解析しているので興味のある方は参照されたい .

$GH_d(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu, A)$  の密度関数は

$$(B.1) \quad p_{GH_d}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu, A) = \frac{e^{\beta^\top(x-\mu)} (A/\delta)^\lambda K_{\lambda-d/2}(\alpha B(x))}{\{\det(A)\}^{1/2} (2\pi)^{d/2} K_\lambda(\delta A) (B(x)/\alpha)^{d/2-\lambda}}$$

で与えられる . ここで記号の簡単の為 ,

$$A := \sqrt{\alpha^2 - \beta^\top A \beta},$$

$$B(x) := \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^\top A^{-1} (x - \mu)}$$

とおいた .  $A$  は正定値対称な  $d \times d$  行列で他のパラメーターは  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $\beta, \mu \in \mathbf{R}^d$ ,  $\delta, \alpha \geq 0$  をみたし, さらに各々

$$(B.2) \quad \begin{aligned} \lambda > 0 \text{ の時, } & \delta \geq 0, \alpha > 0, \alpha^2 > \beta^\top A \beta, \\ \lambda = 0 \text{ の時, } & \delta > 0, \alpha > 0, \alpha^2 > \beta^\top A \beta, \\ \lambda < 0 \text{ の時, } & \delta > 0, \alpha \geq 0, \alpha^2 \geq \beta^\top A \beta \end{aligned}$$

を満足する範囲で動く (応用上は  $\det(A) = 1$  を仮定することが多い) .

$X \sim GH_d(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu, A)$  の時, 1 次元の時と全く同様にして特性関数は (B.1) から直接求めることができ, また以下の関係が成り立つ.

$$(B.3) \quad \begin{aligned} Z &\sim GIG(\lambda, \delta, \sqrt{\alpha^2 - \beta^\top A \beta}), \\ X|Z = z &\sim N_d(\mu + zA\beta, zA). \end{aligned}$$

更に (5.9) の類似として以下の関係も従う.

$$(B.4) \quad Z|X = x \sim GIG\left(\lambda - \frac{d}{2}, \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^\top A^{-1}(x - \mu)}, \alpha\right).$$

$\lambda = \frac{1}{2}(d+1)$ ,  $\lambda = -\frac{1}{2}$  で各々  $H$  分布,  $NIG$  分布の  $d$ -次元版が部分族として得られる. また多次元 Student- $t$  分布も 1 次元の場合と同様のパラメーター操作で得られる.

$X \sim GH_d(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu, A)$  の時, 平均と共分散行列については

$$(B.5) \quad E[X] = \mu + \delta R_\lambda(\zeta) \xi A^{1/2}$$

$$(B.6) \quad \text{Var}[X] = \delta^2 \left\{ \frac{R_\lambda(\zeta) A}{\zeta} + S_\lambda(\zeta) (\xi A^{1/2})^\top (\xi A^{1/2}) \right\}$$

となる. ここで

$$(B.7) \quad \zeta = \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^\top A \beta}$$

$$(B.8) \quad \xi = \beta^\top A^{1/2} (\alpha^2 - \beta^\top A \beta)^{-1/2}$$

で, また

$$(B.9) \quad R_\lambda(x) = \frac{K_{\lambda+1}(x)}{K_\lambda(x)}$$

$$(B.10) \quad S_\lambda(x) = \frac{1}{K_\lambda^2(x)} (K_{\lambda+2}(x) K_\lambda(x) - K_{\lambda+1}^2(x))$$

である.

以下では, 正方行列  $A$  に対して  $|A| := \det(A)$  と書く. Blæsild (1981) は以下の  $GH_d$  分布の重要な性質を提示している.

**命題 B.1.** (Blæsild (1981))  $GH_d$  分布族は, 周辺分布をとること, 要素間での条件付き分布をとること, 及びアフィン変換のもとで閉じている. より正確には以下の通り.

$X = (X^1, X^2, \dots, X^d)^\top \sim GH_d(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu, A)$  とし,  $X = (X_1^\top, X_2^\top)^\top$  を  $X$  の  $r, k$  次元分割とする ( $r+k=d$ ).  $\beta = (\beta_1^\top, \beta_2^\top)^\top$  と  $\mu = (\mu_1^\top, \mu_2^\top)^\top$  を同様の分割とする. 更に

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

を  $A$  の分割とする. ここで  $A_{11}, A_{12}, A_{21}$  及び  $A_{22}$  は各々  $r \times r, r \times k, k \times r, k \times k$  型の行列である. 以上のもとで以下が成り立つ.

(a) 周辺分布をとる操作のもとでの不変性:  $X_1 \sim GH_r(\lambda^*, \alpha^*, \beta^*, \delta^*, \mu^*, A^*)$ . ここで

$$\lambda^* = \lambda, \quad \alpha^* = |A_{11}|^{-1/(2r)} \sqrt{\alpha^2 - \beta_2^\top (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) \beta_2},$$

$$\beta^* = \beta_1 + (\beta_2^\top A_{21} A_{11}^{-1})^\top, \quad \delta^* = \delta |A_{11}|^{1/(2r)},$$

$$\mu^* = \mu_1, \quad A^* = |A_{11}|^{-1/r} A_{11}.$$

(b) 条件付のもとでの不変性:  $X_2|X_1 = x_1 \sim GH_k(\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\delta}, \tilde{\mu}, \tilde{A})$ . ここで

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= \lambda - \frac{r}{2}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha|A_{11}|^{1/(2k)}, \quad \tilde{\beta} = \beta_2, \\ \tilde{\delta} &= |A_{11}|^{-1/(2k)} \sqrt{\delta^2 + (x_1 - \mu_1)^\top A_{11}^{-1} (x_1 - \mu_1)}, \\ \tilde{\mu} &= \mu_2 + \{(x_1 - \mu_1)^\top A_{11}^{-1} A_{12}\}^\top, \\ \tilde{A} &= |A_{11}|^{1/k} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}).\end{aligned}$$

(c) アフィン変換のもとでの不変性: 正則な  $d \times d$  行列  $A$  と  $B \in \mathbf{R}^d$  に対して  $Y = AX + B$  とおく.  $|A|_{abs}$  で  $\det(A)$  の絶対値を表す. この時  $Y \sim GH_d(\bar{\lambda}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}, \bar{\mu}, \bar{A})$ . ここで

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} &= \lambda, \quad \bar{\alpha} = \alpha|A|_{abs}^{-1/d}, \quad \bar{\beta} = A^{-1}\beta, \\ \bar{\delta} &= \delta|A|_{abs}^{1/d}, \quad \bar{\mu} = A\mu + B, \quad \bar{A} = |A|_{abs}^{-2/d} A^\top A A.\end{aligned}$$

注意 B.1. 命題 B.1 において特に  $A = [A_{i,j}]_{i,j=1}^d$ ,  $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^d)^\top$ ,  $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^d)^\top$  と書く時,  $X_j \sim GH_1(\lambda^{[j]}, \alpha^{[j]}, \beta^{[j]}, \delta^{[j]}, \mu^{[j]}, A^{[j]})$  となる. ここで,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^2 &= (\beta^1, \dots, \beta^{j-1}, \beta^{j+1}, \dots, \beta^d)^\top, \\ \hat{A}_{12} &= (A_{j,1}, \dots, A_{j,j-1}, A_{j,j+1}, \dots, A_{j,d}), \\ \hat{A}_{21} &= (A_{1,j}, \dots, A_{j-1,j}, A_{j+1,j}, \dots, A_{d,j})^\top,\end{aligned}$$

とし, かつ  $\hat{A}_{22}$  で  $A$  の第  $j$  行と第  $j$  列を取り除いた  $(d-1) \times (d-1)$  行列を表したもとの, 各パラメーターは以下の通り:

$$\begin{aligned}\lambda^{[j]} &= \lambda, \quad \mu^{[j]} = \mu_j, \quad \beta^{[j]} = \beta^j + A_{j,j} \hat{A}_{12} \hat{\beta}^2, \quad A^{[j]} = 1, \quad \delta^{[j]} = \{\det(A_{j,j})\}^{1/2} \delta, \\ \alpha^{[j]} &= \{\det(A_{j,j})\}^{-1/2} \{\alpha^2 - (\hat{\beta}^2)^\top (\hat{A}_{22} - \hat{A}_{21} A_{j,j}^{-1} \hat{A}_{12}) \hat{\beta}^2\}^{1/2}.\end{aligned}$$

注意 B.2. 命題 B.1 の (a) と (b) からの帰結として,  $X \sim GH_d(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu, A)$  の時, 如何なる排反な周辺要素も互いに独立になり得ないが, それらが無相関であることは起こり得ることが分かる. Blæsild and Jensen (1981) の 51 ページを見られたい.

## 参 考 文 献

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (ed. 1968) *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1977) Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **353**, 401–419.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1978) Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae, *Scand. J. Statist.*, **5**, 151–157.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1979) Models for non-Gaussian variation, with applications to turbulence, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **368**, 501–520.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1997) Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling, *Scand. J. Statist.*, **24**, 1–13.

- Barndorff-Nielsen, O. E. (1998a). Processes of normal inverse Gaussian type, *Finance and Stochastics*, **2**, 41–68.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1998b). Probability and statistics, self-decomposability, finance and turbulence, *Probability towards 2000*, Lecture Notes in Statist., **128**, 47–57, Springer, New York.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Blæsild, P. (1981). Hyperbolic distributions and ramifications: Contributions to theory and application, *Statistical Distributions in Scientific Work* (eds. C. Taillie, G. P. Patil and B. A. Baldessari) Vol. 4, 19–44, Reidel, Dordrecht.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Halgreen, C. (1977). Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distributions, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **38**, 309–311.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2001a). Non-Gaussian OU based models and some of their uses in financial economics (with discussion), *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **63**, 167–241.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2001b). Modelling by Lévy processes for financial econometrics, *Lévy Processes: Theory and Applications* (eds. O.E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch and S. Resnick), 283–318, Birkhäuser, Boston.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2001c). Normal modified stable processes, *Theory Probab. Math. Statist.* (to appear).
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002). Integrated OU processes and non-Gaussian OU-based stochastic volatility models, *Scand. J. Statist.* (to appear).
- Barndorff-Nielsen, O. E., Blæsild, P. and Halgreen, C. (1978). First hitting time models for the generalized inverse Gaussian distribution, *Stochastic Process. Appl.*, **7**, 49–54.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Kent, J. and Sørensen, M. (1982). Normal variance-mean mixtures and  $z$ -distributions, *International Statistical Review*, **50**, 145–159.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Blæsild, P., Jensen, J. L. and Sørensen, M. (1985). The fascination of sand, *A Celebration of Statistics* (eds. A. C. Atkinson and S. E. Fienberg), 57–87, Springer, New York.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Jensen, J. L. and Sørensen, M. (1990). Parametric modelling of turbulence, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **332**, 439–455.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Jensen, J. L. and Sørensen, M. (1998). Some stationary processes in discrete and continuous time, *Adv. in Appl. Probab.*, **30**, 989–1007.
- Bibby, M. and Sørensen, M. (1997). A hyperbolic diffusion model for stock process, *Finance and Stochastics*, **1**, 25–41.
- Bibby, M. and Sørensen, M. (2001). Hyperbolic processes in finance (ed. S. Rachev), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, North Holland (to appear).
- Blæsild, P. (1981). The two-dimensional hyperbolic distribution and related distributions, with an application to Johannsen's data, *Biometrika*, **68**, 251–263.
- Blæsild, P. and Jensen, J. L. (1981). Multivariate distributions of hyperbolic type, *Statistical Distributions in Scientific Work* (eds. C. Taillie, G. P. Patil and B. A. Baldessari) Vol. 4, 45–66, Reidel, Dordrecht.
- Bondesson, L. (1979). A general result on infinite divisibility, *Ann. Probab.*, **7**, 965–979.
- Bondesson, L. (1992). *Generalized Gamma Convolutions and Related Classes of Distributions and Densities*, Lecture Notes in Statist., **76**, Springer, New York.
- Eberlein, E. (2001). Application of generalized hyperbolic Lévy motions to finance, *Lévy Processes: Theory and Applications* (eds. O. E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch and S. Resnick), 319–336, Birkhäuser, Boston.
- Eberlein, E. and Keller, U. (1995). Hyperbolic distributions in finance, *Bernoulli*, **1**, 281–299.
- Eberlein, E. and Raible, S. (1999). Term structure models driven by general Lévy processes, *Math. Finance*, **9**, 31–53.



- Engelbert, H. J. and Schmidt, W. (1985). On solutions of one-dimensional stochastic differential equations without drift, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **68**, 287–314.
- Feller, W. (1966). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2, Wiley, New York.
- Grosswald, E. (1976). The Student  $t$ -distribution of any degree of freedom is infinitely divisible, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **36**, 103–109.
- Halgreen, C. (1979). Self-decomposability of the generalized inverse Gaussian and hyperbolic distributions, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **47**, 13–17.
- Hull, J. and White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance*, **42**, 281–300.
- Ismail, M. E. H. (1977). Bessel functions and the infinite divisibility of the Student- $t$  distribution, *Ann. Probab.*, **5**, 582–585.
- Jensen, J. L. (1981). On the hyperboloid distribution, *Scand. J. Statist.*, **8**, 193–206.
- Jørgensen, B. (1982). *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*, Lecture Notes in Statist., Vol. 9, Springer, New York.
- Jurek, Z. J. and Mason, J. D. (1993). *Operator-limit Distributions in Probability Theory*, Wiley, New York.
- Jurek, Z. J. and Vervaat, W. (1983). An integral representation for selfdecomposable Banach space valued random variables, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **62**, 247–262.
- Küchler, U., Neumann, K., Sørensen, M. and Streller, A. (1999). Stock returns and hyperbolic distributions, *Math. Comput. Modelling*, **29**, 1–15.
- Madan, D. B., Carr, P. P. and Chang, E. C. (1998). The variance gamma process and option pricing, *European Finance Review*, **2**, 79–105.
- Masuda, H. (2002). On some properties of multidimensional Ornstein-Uhlenbeck type processes (preprint).
- Morlat, G. (1956). Les lois de probabilités de Halphen, *Revue de Statistique Appliquée*, **4**, 21–46.
- Prause, K. (1999). The generalized hyperbolic models: Estimation, financial derivatives and risk measurement, Ph.D Thesis, Mathematical Faculty, University of Freiburg.
- Raible, S. (2000). Lévy processes in Finance: Theory, Numerics, and Empirical Facts, Ph. D Thesis, Mathematics Faculty, University of Freiburg.
- Rogers, L. C. G. and Williams, D. (1987). *Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Vol. 2. Itô Calculus*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics, Wiley, New York.
- Rosiński, J. (2000). Stochastic series representations of inverse Gaussian and other exponentially tempered stable processes, Research Report 42, Centre for Mathematical Physics and Stochastics, University of Aarhus, Aarhus.
- Rydberg, T. H. (1997). The normal inverse Gaussian Lévy process: Simulation and Approximation, *Comm. Statist. Stochastic Models*, **13**, 887–910.
- Rydberg, T. H. (1999). Generalized hyperbolic diffusion processes with application in finance, *Math. Finance*, **9**, 183–201.
- Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Sato, K. (2001). Subordination and selfdecomposability, *Statist. Probab. Lett.*, **54**, 317–324.
- Sato, K. and Yamazato, M. (1983). Stationary processes of Ornstein-Uhlenbeck type, *Lecture Notes in Math.*, **1021**, 541–551, Springer, Berlin.
- Sato, K. and Yamazato, M. (1984). Operator-self-decomposable distributions as limit distributions of processes of Ornstein-Uhlenbeck type, *Stochastic Process. Appl.*, **17**, 73–100.

- Seshadri, V. (1993). *The Inverse Gaussian Distribution. A Case Study in Exponential Families*, Oxford University Press, New York.
- Seshadri, V. (1997). Halphen's laws, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Update volume 1 (eds. S. Kotz, C. B. Read and D. L. Banks), 302–306, Wiley, New York.
- Steutel, F. W. (1979). Infinite divisibility in theory and practice, *Scand. J. Statist.*, **6**, 57–64.
- Thorin, O. (1977). On the infinite divisibility of the Pareto distribution, *Scand. Actuar. J.*, **1**, 31–40.
- Urbanik, K. (1972). Lévy's probability measure on Euclidean spaces, *Studia Mathematica*, **44**, 119–148.
- Wolfe, S. J. (1982). On a continuous analogue of the stochastic difference equation  $X_n = \rho X_{n-1} + B_n$ , *Stochastic Process. Appl.*, **12**, 301–312.
- Yamazato, M. (1978). Unimodality of infinitely divisible distribution functions of class  $L$ , *Ann. Probab.*, **6**, 523–531.
- Yamazato, M. (1983). Absolute continuity of operator-selfdecomposable distributions on  $\mathbf{R}^d$ , *J. Multivariate Anal.*, **13**, 550–560.

## Analytical Properties of *GIG* and *GH* Distributions

Hiroki Masuda

(Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo)

Several analytical facts relating to *GIG* (generalized inverse Gaussian) distribution on  $\mathbf{R}_+$  and *GH* (generalized hyperbolic) distribution on  $\mathbf{R}$  are reviewed. The latter is defined as a normal variance-mean mixture where the mixing distribution is the former. Recently these distributions have been applied to mathematical finance in various ways, and their great potential for modelling certain non-Gaussian variations is also presented. In particular, we refer to the fact that *GIG* and *GH* distributions possess selfdecomposability. This concept is closely related to the invariant distribution of the one-dimensional Ornstein-Uhlenbeck type process, which has recently attracted attention as a possible model of the latent volatility process in financial literature. We also briefly review a multi-dimensional version of the *GH* distribution as an appendix.

---

Key words: Generalized hyperbolic distribution, generalized inverse Gaussian distribution, infinitely divisibility, normal variance-mean mixture, selfdecomposability.