統計数理（1997）
第45巻 第2号 359-376

［原著論文］

高次のデータ記述能力を考慮した多変量ノンパラメトリックな統計的不確定性関係

統計数理研究所　土屋　高宏・松縄　規

（1996年11月　受付）

要　旨

多変量ノンパラメトリックな統計的不確定性関係を，モデルの持つデータ記述能力をより高度なものまで取り込んだ不等式として与える．その等号条件として，一つの改善されたノンパラメトリックな統計基礎方程式が，モデルの，観測量と対応する主変量に関する高階偏微分方程式として導かれることを示す．このことから，より精密なノンパラメトリックな多変量統計基礎モデルの構築が原理的に可能となることを示す．例として，代表的な多変量分布等のいくつかを，誤差もより詳しく観測できる状況を想定して誘導する．

1. はじめに

ノンパラメトリックな統計的不確定性関係は，多変量統計基礎モデルを構築するための有効な方法として，著者の一人，Matsunawa (1994) で提唱された．そこでは，観測対象と観測機構（＝統計モデル）の間に成立する不等式（＝不確定性）の等号条件を理想的限界とみて統計基礎方程式を導き，その解として最小不確定性分布を与えた．その結果を用いて，いくつかの代表的な多変量分布を理論的に構築することが試みられた．

本稿では，上述の不確定性関係を，より詳細な不等式を与えることにより改善する．所要の不等式は，ノンパラメトリックなモデルの持つより高次なデータ記述能力を，モデルの，観測量に対応する主変量に関する高階偏微分として表現することによって導かれる．これにより，多変量ノンパラメトリックな統計的不確定性関係の改善が理論的に可能なことが示される．このことの基本的なアイディアはパラメトリックな推定論に於けるいわゆるCramér-Raoの不等式(Rao (1945), Cramér (1946))の一つの改良であるBhattacharyyaの不等式(Bhattacharyya (1946-1948))と密接に関係する．しかしながら，我々が考察する不確定性関係は，ノンパラメトリックでかつ多変量の場合であり，Bhattacharyyaの不等式とは立場を異にする．本研究が，一個のランダム行列に対する不等式であることも前記の推定論の場合に比べ顕著な違いである．この不確定性関係の改善を与える不等式の等号条件として，一つの改良された高階偏微分基礎方程式を得る．この方程式を適切な条件下で解くことにより，より精密な多変量ノンパラメトリックモデルを原理的に得ることが可能である．

本稿の以下の構成は次の通りである．次章で必要となる記号及び仮定を挙げる．第3章では本稿に於ける理論の理解を容易にするため及びそれ自体の重要性から，まず一変量の場合のノンパラメトリックな統計的不確定性関係の改善を与える．例として，よく知られた一次元分布を，観測するときの誤差をより精密に設定することにより誘導する．本稿の主要な結果は第4章に与えられる．そこではk変量のモデルに関する理論が展開され，それらに基づいて前章の

諸例の多変量への拡張がなされる．最後に若干の考察及び第4章の議論に関する数式展開上の補遺が与えられている．

2. 記号及び仮定

本章では，ノンパラメトリックな統計的不確定性関係の改善を考察する際に必要な記号と基礎モデルが満たすべき主な仮定を挙げる．

$A=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_q)$ を列ベクトル $\boldsymbol{a}_i=(a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{pi})^t$ ($i=1, 2, \cdots, q$) を持つ $p\times q$ 行列とする．各 i について，$\boldsymbol{a}_i$ から p_i 個の要素を取り出して部分列ベクトル $\boldsymbol{a}_i^*=(a_{1i}^*, a_{2i}^*,\cdots, a_{p_ii}^*)^t$ を構成する．この部分列ベクトルを積み上げる事により，行列 A の列ベクトル化を次のように定義する：

$$|A\rangle=(a_{11}^*, a_{21}^*, \cdots, a_{p_11}^*, a_{12}^*, a_{22}^*, \cdots, a_{p_22}^*, \cdots, a_{1q}^*, a_{2q}^*, \cdots, a_{p_qq}^*)^t,$$

ここで，$\sum_{i=1}^q p_i=:k$ は生成された列ベクトル $|A\rangle$ の次元を表す．また，これを転置した行ベクトルを次のように表す：

$$\langle A|\,[\equiv|A\rangle^t].$$

いま，$|A\rangle$ をランダム行列 A をベクトル化した k-次元ランダムベクトルとし，測度空間 $(R^k, \boldsymbol{B}^k, \mu)$ 上で定義されているものとする．ここに，R^k は k-次元実空間，$\boldsymbol{B}^k$ は R^k の部分集合のボレル集合体，μ は可測空間 $(R^k, \boldsymbol{B}^k)$ 上の σ-有限測度を表す．$\boldsymbol{P}=\{P_\Lambda^A; \Lambda\in\mathcal{S}_\Lambda\}$ を上記の可測空間で定義される多変量ノンパラメトリックなモデルの分布族とする．ここで，Λ は A に関係しない潜在パラメーターとする．確率分布 P_Λ^A は μ に関して絶対連続，すなわち

$$P_\Lambda^A(dA)=f(A;\Lambda)\mu(dA)$$

と仮定する．ここに，$f(A;\Lambda)$ は μ に関する Radon-Nikodym 導関数を表す．

注 2.1. Λ は A に関係しない潜在パラメーターとした．この条件により，基本的研究段階での，ノンパラメトリックな統計基礎方程式が複雑にならずにすみ，基礎モデルを構築する際にも，考察対象となる積分が原理的に扱い易いものとなる．勿論，基礎モデルが規格化条件を満たさねばならないということに Λ と A は拘束されている (cf. Matsunawa (1994)，定理 4.1)．これらの二条件を満たす範囲内であれば，数学的には，A に対して Λ は自由に設定できる．従って，A に対して基礎モデルの候補が複数考えられることもあり得る．その中から適切なものをどう選択するかが問題になってくるが，それ自体が独立した大きな課題と見なせるものであり，本稿では触れない．

ここで，以下で必要になる j 階偏微分作用素列ベクトル ($1\leq j\leq n$) を定義する：

$$\left|\frac{\partial}{\partial A}\right\rangle_l :=\left(\frac{\partial}{\partial a_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial a_k}\right)^t \qquad [k\times 1],$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2}{\partial A^2}\right\rangle_l &:=\left\|\frac{\partial}{\partial A}\right\rangle\left\langle\frac{\partial}{\partial A}\right|\right\rangle_l \\ &=\left(\frac{\partial^2}{\partial a_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2}{\partial a_k^2}, \frac{\partial^2}{\partial a_1\partial a_2}, \cdots, \frac{\partial^2}{\partial a_{k-1}\partial a_k}\right)^t \qquad [k(k+1)/2\times 1],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^3}{\partial A^3}\right\rangle_l &:=\left\|\frac{\partial}{\partial A}\right\rangle\left\langle\frac{\partial^2}{\partial A^2}\right|\right\rangle_l=\left\|\frac{\partial^2}{\partial A^2}\right\rangle\left\langle\frac{\partial}{\partial A}\right|\right\rangle_l \\ &=\left(\frac{\partial^3}{\partial a_1^3}, \cdots, \frac{\partial^3}{\partial a_k^3}, \frac{\partial^3}{\partial a_1^2\partial a_2}, \cdots, \frac{\partial^3}{\partial a_{k-1}\partial a_k^2}\right)^t \qquad [k(k+1)(k+2)/3!\times 1],\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial A^{n-1}}\right\rangle_\iota := \left\|\frac{\partial}{\partial A}\right\rangle\left\langle\frac{\partial^{n-2}}{\partial A^{n-2}}\right|\Big\rangle_\iota = \left\|\frac{\partial^2}{\partial A^2}\right\rangle\left\langle\frac{\partial^{n-3}}{\partial A^{n-3}}\right|\Big\rangle_\iota = \cdots = \left\|\frac{\partial^{n-2}}{\partial A^{n-2}}\right\rangle\left\langle\frac{\partial}{\partial A}\right|\Big\rangle_\iota$$
$$= \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial a_1^{n-1}}, \cdots, \frac{\partial^{n-1}}{\partial a_k^{n-1}}, \frac{\partial^{n-1}}{\partial a_1^{n-2}\partial a_2}, \cdots, \frac{\partial^{n-1}}{\partial a_{k-1}\partial a_k^{n-2}}\right)^t \quad [{}_{k+n-2}C_{n-1}\times 1],$$

$$\left|\frac{\partial^{n}}{\partial A^{n}}\right\rangle_\iota := \left\|\frac{\partial}{\partial A}\right\rangle\left\langle\frac{\partial^{n-1}}{\partial A^{n-1}}\right|\Big\rangle_\iota = \left\|\frac{\partial^2}{\partial A^2}\right\rangle\left\langle\frac{\partial^{n-2}}{\partial A^{n-2}}\right|\Big\rangle_\iota = \cdots = \left\|\frac{\partial^{n-1}}{\partial A^{n-1}}\right\rangle\left\langle\frac{\partial}{\partial A}\right|\Big\rangle_\iota$$
$$= \left(\frac{\partial^{n}}{\partial a_1^{n}}, \cdots, \frac{\partial^{n}}{\partial a_k^{n}}, \frac{\partial^{n}}{\partial a_1^{n-1}\partial a_2}, \cdots, \frac{\partial^{n}}{\partial a_{k-1}\partial a_k^{n-1}}\right)^t \quad [{}_{k+n-1}C_{n}\times 1].$$

ここに，演算$|\ \ \rangle_\iota$は，各記号の下付添数について，重複を避けて番号が若いsimpleなものから複雑なものへ辞書式(lexicographically)に並べかえる列ベクトル化と約束する．また，$(a_1, a_2, \cdots, a_k)=(a_{11}^*, a_{21}^*, \cdots, a_{p_1 1}^*, a_{12}^*, a_{22}^*, \cdots, a_{p_2 2}^*, \cdots, a_{1q}^*, a_{2q}^*, \cdots, a_{p_q q}^*)$であり，${}_nC_r$は$n$個の中から$r$個を選ぶ組合せの数を表す．

以上の記号の下，モデルの密度$f(A\,;\Lambda)$に対して，$|\partial^j/\partial A^j\rangle_\iota f(A\,;\Lambda)$ $(1\leq j\leq n)$ が存在する($\boldsymbol{P}$-a.e.) と仮定する．

次に，Aのランダム行列値関数$\Phi(A\,;\Lambda)$で観測対象関数，$\Psi(A\,;\Lambda)$で$\Phi(A\,;\Lambda)$に対する同じ大きさの行列値近似関数を表す．また，ΦをΨで近似するときの測定誤差を$\Delta(A;\Lambda)=\Phi(A\,;\Lambda)-\Psi(A\,;\Lambda)$で表す．さらに，統計モデルの持つデータの記述能力に関して，次のようなAに関する高次の性能比強度を考える：

$$|\mathcal{P}_1\rangle := \left|\frac{\partial \ln f(A;\Lambda)}{\partial A}\right\rangle_\iota = \left|\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f(A;\Lambda)}{\partial A}\right\rangle_\iota,$$
$$|\mathcal{P}_2\rangle := \left|\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial^2 f(A;\Lambda)}{\partial A^2}\right\rangle_\iota,$$
$$\vdots$$
$$|\mathcal{P}_{n-1}\rangle := \left|\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial^{n-1} f(A;\Lambda)}{\partial A^{n-1}}\right\rangle_\iota,$$
$$|\mathcal{P}_n\rangle := \left|\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial^{n} f(A;\Lambda)}{\partial A^{n}}\right\rangle_\iota.$$

以上のような設定の下で，ノンパラメトリックな統計的不確定性関係の改善について考察する．次章では，理解を容易にするためとそれ自体の重要性から，まずランダム行列Aが一変量の場合について述べる．

3.　1変量の場合

本章では，前述のA, Δ, Λをそれぞれ，a, δ, λで表す．

いま，μに関するRadon-Nikodym導関数$f(a;\lambda)$による次の期待値が存在すると仮定する：

$$\sigma^2 := E[\delta(a;\lambda)^2],$$
$$I_{11} := E\left[\frac{1}{f(a;\lambda)}\frac{\partial f(a;\lambda)}{\partial a}\cdot\frac{1}{f(a;\lambda)}\frac{\partial f(a;\lambda)}{\partial a}\right],$$
$$I_{12} := E\left[\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial a}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\right],$$
$$\vdots$$

$$I_{n-1,n}:=E\left[\frac{1}{f}\frac{\partial^{n-1}f}{\partial a^{n-1}}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^n f}{\partial a^n}\right],$$

$$I_{nn}:=E\left[\frac{1}{f}\frac{\partial^n f}{\partial a^n}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^n f}{\partial a^n}\right],$$

$$J^{(1)}:=E\left[\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial a}\cdot\delta\right],$$

$$J^{(2)}:=E\left[\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\cdot\delta\right],$$

$$\vdots$$

$$J^{(n)}:=E\left[\frac{1}{f}\frac{\partial^n f}{\partial a^n}\cdot\delta\right].$$

このとき，次の定理が成立する：

定理 3.1. 次の不等式が成立する：

$$\sigma^2\geq[J^{(1)},\cdots,J^{(n)}]\begin{bmatrix} I_{11} & \cdots & I_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ I_{n1} & \cdots & I_{nn}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} J^{(1)}\\ \vdots\\ J^{(n)}\end{bmatrix},$$

ただし，$I_{ij}=I_{ji}$ $(1\leq i,j\leq n)$ である．また上記不等式で，等号が成り立つための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J^{(i)}I^{ij}\frac{1}{f}\frac{\partial^j f}{\partial a^j}-\delta=0 \quad (J^{(i)}\neq 0,\ 1\leq i\leq n) \quad [\mu\text{-a.e.}]$$

で表現されるノンパラメトリックな統計基礎方程式が成立するとき，そしてそのときのみに限られる．

証明. 次の量を考える：

$$d=\delta-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J^{(i)}I^{ij}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^j f}{\partial a^j},$$

ただし，I^{ij} $(i,j=1,\cdots,n)$ は $I=(I_{ij})_{n\times n}$ の逆行列の各成分で，$I^{ij}=I^{ji}$ である．

このとき，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
E[d^2]&=E\left[\delta-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J^{(i)}I^{ij}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^j f}{\partial a^j}\right]^2\\
&=E\left[\delta^2-2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J^{(i)}I^{ij}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^j f}{\partial a^j}\cdot\delta+\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J^{(i)}I^{ij}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^j f}{\partial a^j}\right)^2\right]\\
&=E[\delta^2]-2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J^{(i)}I^{ij}\cdot E\left[\frac{1}{f}\frac{\partial^j f}{\partial a^j}\cdot\delta\right]+E\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J^{(i)}I^{ij}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^j f}{\partial a^j}\right]^2 \qquad (3.1)\\
&=\sigma^2-2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J^{(i)}I^{ij}J^{(j)}+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J^{(i)}I^{ij}J^{(j)}\\
&=\sigma^2-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J^{(i)}I^{ij}J^{(j)}\geq 0.
\end{aligned}$$

ただし，上の(3.1)式の3項目の期待値は次のように計算できる：

$$\begin{aligned}
&E\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J^{(i)}I^{ij}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^j f}{\partial a^j}\right]^2\\
&=E\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^n J^{(i)2}I^{ij}I^{il}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^j f}{\partial a^j}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^l f}{\partial a^l}+\sum_{i\neq j}^n\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^n J^{(i)}J^{(j)}I^{il}I^{jm}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^l f}{\partial a^l}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^m f}{\partial a^m}\right]\\
&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J^{(i)2}I^{ij}\sum_{l=1}^n I^{il}\cdot E\left[\frac{1}{f}\frac{\partial^j f}{\partial a^j}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^l f}{\partial a^l}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i\neq j}^{n}\sum_{l=1}^{n}J^{(i)}J^{(j)}I^{il}\sum_{m=1}^{n}I^{jm}\cdot E\left[\frac{1}{f}\frac{\partial^l f}{\partial a^l}\cdot\frac{1}{f}\frac{\partial^m f}{\partial a^m}\right]\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}J^{(i)2}I^{ij}\sum_{l=1}^{n}I^{il}I_{jl}+\sum_{i\neq j}^{n}\sum_{l=1}^{n}J^{(i)}J^{(j)}I^{il}\sum_{m=1}^{n}I^{jm}I_{lm}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}J^{(i)2}I^{ij}\sum_{l=1}^{n}I^{il}I_{lj}+\sum_{i\neq j}^{n}\sum_{l=1}^{n}J^{(i)}J^{(j)}I^{il}\sum_{m=1}^{n}I^{jm}I_{ml}\\
&=\sum_{i=1}^{n}J^{(i)2}I^{ii}+\sum_{i\neq j}^{n}J^{(i)}J^{(j)}I^{ij}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}J^{(i)}I^{ij}J^{(j)}.
\end{aligned}
$$

ゆえに,

$$
\sigma^2\geq[J^{(1)},\cdots,J^{(n)}]\begin{bmatrix} I_{11} & \cdots & I_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ I_{n1} & \cdots & I_{nn}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} J^{(1)}\\ \vdots\\ J^{(n)}\end{bmatrix}
$$

を得る．ここで，前述の期待値 $E[d^2]=0$ となるのは $d=0$ となるとき，そのときに限る．よって，$J^{(i)}\neq 0$ $(1\leq i\leq n)$ ならば，上記不等式で等号が成り立つための必要十分条件として次の統計基礎方程式が従う：

(3.2) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}J^{(i)}I^{ij}\frac{1}{f}\frac{\partial^j f}{\partial a^j}-\delta=0\quad(\mu\text{-a.e.}).$$ □

特に，$n=2$ のとき，(3.2) は

(3.3) $$(J^{(1)}I^{12}+J^{(2)}I^{22})\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}+(J^{(1)}I^{11}+J^{(2)}I^{21})\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial a}-\delta=0$$

と書くことができる．よって，$K_2(\lambda)=J^{(1)}I^{12}+J^{(2)}I^{22}$，$K_1(\lambda)=J^{(1)}I^{11}+J^{(2)}I^{21}$ とおくと，(3.3)式は次の二階偏微分基礎方程式で表しうる：

$$K_2(\lambda)\frac{\partial^2 f(a;\lambda)}{\partial a^2}+K_1(\lambda)\frac{\partial f(a;\lambda)}{\partial a}-\delta(a;\lambda)f(a;\lambda)=0.$$

同様に，一般に (3.2) は

(3.4) $$
\begin{aligned}
&K_n(\lambda)\frac{\partial^n f(a;\lambda)}{\partial a^n}+K_{n-1}(\lambda)\frac{\partial^{n-1}f(a;\lambda)}{\partial a^{n-1}}\\
&\quad+\cdots+K_1(\lambda)\frac{\partial f(a;\lambda)}{\partial a}-\delta(a;\lambda)f(a;\lambda)=0
\end{aligned}
$$

の形に書くことができる．

この結果，$\delta(a;\lambda)$ および $K_n(\lambda)$, $K_{n-1}(\lambda)$, $\cdots$, $K_1(\lambda)$ を適切に設定し，適切な条件の下で高階偏微分方程式 (3.4) を解くことができるなら，より精密なノンパラメトリックモデルを得ることが可能である．しかしながら，一般に高階偏微分方程式を解析的に解くことは困難な場合が多い．本章の残りの部分では，δ をより精密に設定することによって，いくつかのよく知られた一次元分布を統計基礎モデルとして誘導する．

例 3.1. 正規分布

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

誘導. 次のように設定する:

$$K_j=(-\sigma)^j\ (j=1,\cdots,n),\quad \delta(x;\mu,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}H_i\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

ここに，H_i は i 次のエルミート多項式を表す．

これらを（3.4）式に代入すると，

$$(3.5)\qquad (-\sigma)^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+(-\sigma)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}+\cdots-\sigma\frac{\partial f}{\partial x}-\sum_{i=1}^{n}H_i\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)f=0\,.$$

ところで，よく知られたエルミート多項式に関する次の関係式が成立する：

$$H_j\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\phi(x)=(-\sigma)^j\frac{\partial^j\phi(x)}{\partial x^j}\,.$$

ただし，$\phi(x)$ は平均 μ, 分散 σ^2 の正規密度関数である．また，低次のエルミート多項式は次のように表される：$H_1(x)=x$, $H_2(x)=x^2-1$, $H_3(x)=x^3-3x$, $\cdots$. したがって，

$$(3.6)\qquad \sum_{i=1}^{n}H_i\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\phi(x)=\sum_{i=1}^{n}(-\sigma)^i\frac{\partial^i\phi(x)}{\partial x^i}$$

を得る．（3.5）と（3.6）を比較すれば，明らかに ϕ は基礎方程式の解の一つである．よって，所要の正規分布が基礎方程式から誘導できることが分かる．

注 3.1. 本章の基礎モデルの例は $n=1$ の場合からも誘導出来る．しかしここでこれらを取り扱っているのは，定理 3.1 がその特殊な場合として本章の重要な分布を確かに構築できることと，定理 3.1 および次章の定理 4.1 の内容を，良く知られたシンプルな例で理解した方が良いと考えるからである．なお，分布の特徴付けの問題という数学的観点に立つ時は，統計基礎方程式の一意解を与える n の最小次数決定の問題は興味のある問題である．この点については我々はまだ明快な成果を得ていない．今後の課題としたい．

例 3.2. ガンマ分布

$$f(x;\,r,\,\lambda)=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}\,.$$

誘導．

$$K_j=1\ (1\le j\le n)\,,\quad \delta(x;\,r,\,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k{}_iC_k\lambda^k\left(\prod_{l=1}^{i-k}\frac{r-l}{x}\right)$$

と設定すればよい．ただし，$k=j$ のとき，$\prod_{l=1}^{i-k}\{(r-l)/x\}=1$ とする．

これらを（3.4）式に代入すると，基礎方程式は

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k{}_iC_k\lambda^k\left(\prod_{l=1}^{i-k}\frac{r-l}{x}\right)f=0$$

で与えられる．

ここで，δ は以下のように表現しうる：

$$\begin{aligned}
\delta(x;\,r,\,\lambda)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k{}_iC_k\lambda^k\left(\prod_{l=1}^{i-k}\frac{r-l}{x}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\Big\{{}_iC_0\frac{(r-1)(r-2)\cdots(r-i)}{x^i}-{}_iC_1\lambda\frac{(r-1)(r-2)\cdots(r-i+1)}{x^{i-1}}\\
&\qquad+{}_iC_2\lambda^2\frac{(r-1)(r-2)\cdots(r-i+2)}{x^{i-2}}-\cdots+(-1)^i{}_iC_i\lambda^i\Big\}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left\{\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}\right\}\right]\frac{\Gamma(r)}{\lambda^r}x^{1-r}e^{\lambda x}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial^i}{\partial x^i}f(x;\,r,\,\lambda)\right\}\Big/f(x;\,r,\,\lambda).
\end{aligned}$$

したがって，ガンマ分布は確かに K，δ を上のように設定したときの基礎方程式の解になっている．

例 3.3. ベータ分布

$$f(x;\ \nu_1,\ \nu_2)=\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}x^{\nu_1-1}(1-x)^{\nu_2-1}\quad(0<x<1).$$

誘導.

$$K_j=1\ (1\leq j\leq n),$$
$$\delta(x;\ \nu_1,\ \nu_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k{}_iC_k\left(\prod_{l=1}^{i-k}\frac{\nu_1-l}{x}\prod_{l=1}^{k}\frac{\nu_2-l}{1-x}\right)$$

と設定すればよい．ただし，$k=j$ のとき，$\prod_{l=1}^{i-k}\{(\nu_1-l)/x\}=1$, $k=0$ のとき，$\prod_{l=1}^{k}\{(\nu_2-l)/(1-x)\}=1$ とする．

これらを (3.4) 式に代入すると，

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k{}_iC_k\left(\prod_{l=1}^{i-k}\frac{\nu_1-l}{x}\prod_{l=1}^{k}\frac{\nu_2-l}{1-x}\right)f=0.$$

ここで，δ は次のように表される：

$$\begin{aligned}
\delta(x;\ \nu_1,\ \nu_2)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k{}_iC_k\left(\prod_{l=1}^{i-k}\frac{\nu_1-l}{x}\prod_{l=1}^{k}\frac{\nu_2-l}{1-x}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left\{{}_iC_0\frac{(\nu_1-1)(\nu_1-2)\cdots(\nu_1-i)}{x^i}\right.\\
&\quad-{}_iC_1\frac{(\nu_1-1)(\nu_1-2)\cdots(\nu_1-i+1)(\nu_2-1)}{x^{i-1}(1-x)}\\
&\quad+{}_iC_2\frac{(\nu_1-1)(\nu_1-2)\cdots(\nu_1-i+2)(\nu_2-1)(\nu_2-2)}{x^{i-2}(1-x)^2}\\
&\quad\left.-\cdots+(-1)^i{}_iC_i\frac{(\nu_2-1)(\nu_2-2)\cdots(\nu_2-i)}{(1-x)^i}\right\}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left\{\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}x^{\nu_1-1}(1-x)^{\nu_2-1}\right\}\right]\frac{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\nu_1+\nu_2)}x^{1-\nu_1}(1-x)^{1-\nu_2}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial^i}{\partial x^i}f(x;\ \nu_1,\ \nu_2)\right\}\Big/f(x;\ \nu_1,\ \nu_2).
\end{aligned}$$

したがって，f は確かに K，δ を上のように設定したときの基礎方程式の解になっている．

4. *k* 変量の場合

本章では，ランダム行列 A の列ベクトル化 $|A\rangle$ が k 変量をもつ場合について考察する．まず，μ に関する Radon-Nikodym 導関数 $f(A;\ \Lambda)$ による期待値として次の行列が存在することを仮定する．各行の右端は行列の大きさを表している．

$$\begin{aligned}
&\Sigma:=E[|\Delta\rangle\langle\Delta|] && [k\times k],\\
&I_{11}:=E[|\mathcal{P}_1\rangle\langle\mathcal{P}_1|] && [k\times k],\\
&I_{12}:=E[|\mathcal{P}_1\rangle\langle\mathcal{P}_2|] && [k\times k(k+1)/2],\\
&I_{21}:=I_{12}^t && [k(k+1)/2\times k],\\
&\qquad\vdots\\
&I_{n-1,n}:=E[|\mathcal{P}_{n-1}\rangle\langle\mathcal{P}_n|] && [{}_{k+n-2}C_{n-1}\times{}_{k+n-1}C_n],\\
&I_{n,n-1}:=I_{n-1,n}^t && [{}_{k+n-1}C_n\times{}_{k+n-2}C_{n-1}],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_{nn} &:= E[|\mathcal{P}_n\rangle\langle\mathcal{P}_n|] && [{}_{k+n-1}C_n \times {}_{k+n-1}C_n],\\
J^{(1)} &:= E[|\mathcal{P}_1\rangle\langle\Delta|] && [k\times k],\\
J^{(2)} &:= E[|\mathcal{P}_2\rangle\langle\Delta|] && [k(k+1)/2\times k],\\
J^{(3)} &:= E[|\mathcal{P}_3\rangle\langle\Delta|] && [k(k+1)(k+2)/3!\times k],\\
&\ \ \vdots\\
J^{(n)} &:= E[|\mathcal{P}_n\rangle\langle\Delta|] && [{}_{k+n-1}C_n\times k].
\end{aligned}
$$

ここに，$|\Delta\rangle$ は k-次元誤差ベクトル，$\mathcal{P}_i$ $(1\le i\le n)$ は第2章で導入した高次の性能比強度を表す．

以上の設定の下で，次の定理が成立する：

定理 4.1. $\boldsymbol{y}\in R^k$ を任意の k-次元実数ベクトルとする．このとき，次の不等式（改善されたノンパラメトリックな統計的不確定性関係）が成立する：

$$
\boldsymbol{y}^t\Sigma\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{y}^t[J^{(1)t}, J^{(2)t}, \cdots, J^{(n)t}]\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & \cdots & I_{1n}\\ I_{21} & I_{22} & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ I_{n1} & \cdots & \cdots & I_{nn}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} J^{(1)}\\ J^{(2)}\\ \vdots\\ J^{(n)}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}.
$$

また上記不等式で，等号が成り立つための必要十分条件は

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} J^{(i)t}I^{ij}|\mathcal{P}_j\rangle - |\Delta\rangle = \boldsymbol{0} \quad [k\times 1] \quad (\mu\text{-a.e.})
$$

で表現される統計基礎方程式が成立するとき，そしてそのときのみに限られる．ただし，$J^{(i)}$ $(1\le i\le n)$ は零行列でない大きさ ${}_{k+i-1}C_i\times k$ の行列である．

証明.

$$
\boldsymbol{d} = |\Delta\rangle - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} J^{(i)t}I^{ij}|\mathcal{P}_j\rangle
$$

とおく．ただし，

$$
\begin{bmatrix} I^{11} & I^{12} & \cdots & I^{1n}\\ I^{21} & I^{22} & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ I^{n1} & \cdots & \cdots & I^{nn}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & \cdots & I_{1n}\\ I_{21} & I_{22} & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ I_{n1} & \cdots & \cdots & I_{nn}\end{bmatrix}^{-1}.
$$

すると，$\boldsymbol{dd}^t\gg 0$（ここに，$X\gg 0$ は X が半正値対称行列であることを表す）であることから，次が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
E[\boldsymbol{dd}^t] &= E\left[\left(|\Delta\rangle - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} J^{(i)t}I^{ij}|\mathcal{P}_j\rangle\right)\cdot\left(\langle\Delta| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle\mathcal{P}_j|I^{ji}J^{(i)}\right)\right]\\
&= E[|\Delta\rangle\langle\Delta|] - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E[|\Delta\rangle\langle\mathcal{P}_j|]I^{ji}J^{(i)}\\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} J^{(i)t}I^{ij}E[|\mathcal{P}_j\rangle\langle\Delta|] + E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} J^{(i)t}I^{ij}|\mathcal{P}_j\rangle\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle\mathcal{P}_j|I^{ji}J^{(i)}\right]\\
&= \Sigma - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} J^{(j)t}I^{ji}J^{(i)} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} J^{(i)t}I^{ij}J^{(j)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} J^{(i)t}I^{ij}J^{(j)}\\
&= \Sigma - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} J^{(i)t}I^{ij}J^{(j)} \gg 0.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

ここで，上の (4.1) 式における4項目の期待値は次のように計算できる：

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}J^{(i)t}I^{ij}|\mathcal{P}_j\rangle\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle\mathcal{P}_j|I^{ji}J^{(i)}\Big]\\
&=E\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}J^{(i)t}I^{ij}|\mathcal{P}_j\rangle\langle\mathcal{P}_l|I^{li}J^{(i)}+\sum_{i\neq j}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}J^{(i)t}I^{il}|\mathcal{P}_l\rangle\langle\mathcal{P}_m|I^{mj}J^{(j)}\Big]\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}J^{(i)t}I^{ij}E[|\mathcal{P}_j\rangle\langle\mathcal{P}_l|]I^{li}J^{(i)}+\sum_{i\neq j}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}J^{(i)t}I^{il}E[|\mathcal{P}_l\rangle\langle\mathcal{P}_m|]I^{mj}J^{(j)}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}J^{(i)t}I^{ij}I_{jl}I^{li}J^{(i)}+\sum_{i\neq j}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}J^{(i)t}I^{il}I_{lm}I^{mj}J^{(j)}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}J^{(i)t}I^{ij}\sum_{l=1}^{n}I_{jl}I^{li}J^{(i)}+\sum_{i\neq j}^{n}\sum_{l=1}^{n}J^{(i)t}I^{il}\sum_{m=1}^{n}I_{lm}I^{mj}J^{(j)}\\
&=\sum_{i=1}^{n}J^{(i)t}I^{ii}J^{(i)}+\sum_{i\neq j}^{n}J^{(i)t}I^{ij}J^{(j)} \qquad (4.2)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}J^{(i)t}I^{ij}J^{(j)}.
\end{aligned}
$$

ただし，(4.2) 式は逆行列の性質 $\sum_{l=1}^{n}I_{jl}I^{li}=0_{{}_{k+j-1}C_j\times{}_{k+i-1}C_i}$ $(i\neq j)$, $=I$ $(i=j)$, $\sum_{m=1}^{n}I_{lm}I^{mj}=0_{{}_{k+l-1}C_l\times{}_{k+j-1}C_j}$ $(j\neq l)$, $=I$ $(j=l)$ を使って得られることに注意する．

以上の結果から，$^\forall\boldsymbol{y}\in R^k$ に対して，次の不等式(改善されたノンパラメトリックな統計的不確定性関係) を得る：

$$
\boldsymbol{y}^t\Sigma\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{y}^t[J^{(1)t},J^{(2)t},\cdots,J^{(n)t}]\begin{bmatrix}I_{11}&I_{12}&\cdots&I_{1n}\\I_{21}&I_{22}&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\vdots\\I_{n1}&\cdots&\cdots&I_{nn}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}J^{(1)}\\J^{(2)}\\\vdots\\J^{(n)}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}.
$$

上記不等式で等号が成り立つのは，$E[\boldsymbol{dd}^t]=0_{k\times k}$，すなわち $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$ となるとき，そのときに限る．よって，$J^{(i)}\neq 0_{{}_{k+i-1}C_i\times k}$ $(1\leq i\leq n)$ ならば，等号成立の必要十分条件として次の統計基礎方程式が従う：

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}J^{(i)t}I^{ij}|\mathcal{P}_j\rangle-|\Delta\rangle=\boldsymbol{0}\quad(\mu\text{-a.e.}). \tag{4.3}
$$
□

$n=1$ のとき，(4.3) は

$$
J^{(1)t}I^{11}|\mathcal{P}_1\rangle-|\Delta\rangle=\boldsymbol{0} \tag{4.4}
$$

と書くことができる．よって，$K^{-1}(\Lambda)=J^{(1)t}I^{11}$ とおくと，(4.4) は

$$
\left|\frac{\partial\ln f(A;\Lambda)}{\partial A}\right\rangle_l=K(\Lambda)|\Delta(A;\Lambda)\rangle
$$

となり，これは，Matsunawa (1994) で与えられた通常の基礎方程式である．また，$n=2$ のとき，(4.3) は

$$
(J^{(1)t}I^{12}+J^{(2)t}I^{22})|\mathcal{P}_2\rangle+(J^{(1)t}I^{11}+J^{(2)t}I^{21})|\mathcal{P}_1\rangle-|\Delta\rangle=\boldsymbol{0}
$$

となる．よって，$K_2(\Lambda)=J^{(1)t}I^{12}+J^{(2)t}I^{22}$，$K_1(\Lambda)=J^{(1)t}I^{11}+J^{(2)t}I^{21}$ とおくと，次の二階偏微分基礎方程式を得る：

$$K_2(\Lambda)\left|\frac{\partial^2 f(A;\Lambda)}{\partial A^2}\right\rangle_l+K_1(\Lambda)\left|\frac{\partial f(A;\Lambda)}{\partial A}\right\rangle_l-|\Delta(A;\Lambda)\rangle f(A;\Lambda)=\mathbf{0}. \tag{4.5}$$

同様に，一般に (4.3) は

$$\begin{aligned}K_n(\Lambda)\left|\frac{\partial^n f(A;\Lambda)}{\partial A^n}\right\rangle_l&+K_{n-1}(\Lambda)\left|\frac{\partial^{n-1} f(A;\Lambda)}{\partial A^{n-1}}\right\rangle_l\\&+\cdots+K_1(\Lambda)\left|\frac{\partial f(A;\Lambda)}{\partial A}\right\rangle_l-|\Delta(A;\Lambda)\rangle f(A;\Lambda)=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{4.6}$$

の形に書くことができる．ここで，$K_n(\Lambda), K_{n-1}(\Lambda), \cdots, K_1(\Lambda)$ はそれぞれ，大きさ $k\times{}_{k+n-1}C_n$, $k\times{}_{k+n-2}C_{n-1},\ldots, k\times k$ の行列である．

したがって，$\Delta(A;\Lambda)$ および $K_n(\Lambda)$, $K_{n-1}(\Lambda)$, $\cdots$, $K_1(\Lambda)$ を適切に設定し，適切な条件下で k-次元高階偏微分方程式 (4.6) を解くことができるなら，より精密な多変量ノンパラメトリックモデルを得ることができる．

1変量の場合と同様に，Δ をより精密に設定することによって，いくつかの代表的な多変量分布を統計基礎モデルとして誘導する．

例 4.1. 多変量正規分布

$$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu},\Sigma)=(2\pi)^{-k/2}|\Sigma|^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^t\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right],$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ は k-次元実ベクトルである．

誘導． 次のように設定する：

$$K_1(\Lambda)=I\ (k\times k\ \text{行列}),\ K_j(\Lambda)=[I|0]_j\ [k\times{}_{k+j-1}C_j\ \text{行列},\ 2\le j\le n],$$

$$|\Delta(\boldsymbol{x};\Lambda)\rangle=\begin{bmatrix}-h_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu};\Sigma)+h_{11}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu};\Sigma)-\cdots+(-1)^n h_{1\cdots1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu};\Sigma)\\-h_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu};\Sigma)+h_{22}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu};\Sigma)-\cdots+(-1)^n h_{2\cdots2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu};\Sigma)\\ \vdots\\-h_k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu};\Sigma)+h_{kk}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu};\Sigma)-\cdots+(-1)^n h_{k\cdots k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu};\Sigma)\end{bmatrix}.$$

ここに，h は共変エルミート多項式を表す．

これらを (4.6) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}[I|0]_n\left|\frac{\partial^n f}{\partial \boldsymbol{x}^n}\right\rangle_l&+[I|0]_{n-1}\left|\frac{\partial^{n-1} f}{\partial \boldsymbol{x}^{n-1}}\right\rangle_l\\&+\cdots+I\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right\rangle_l-\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i h_{\underbrace{1\cdots1}_{i}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu};\Sigma)\\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i h_{\underbrace{2\cdots2}_{i}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu};\Sigma)\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i h_{\underbrace{k\cdots k}_{i}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu};\Sigma)\end{bmatrix}f=\mathbf{0}\end{aligned}$$

となる．よって，第1章で定義した $|\ \ \rangle_l$ の解釈から，基礎方程式は次のように与えられる：

$$(4.7)\qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^n} \\ \frac{\partial^n f}{\partial x_2^n} \\ \vdots \\ \frac{\partial^n f}{\partial x_k^n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_1^{n-1}} \\ \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_2^{n-1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_k^{n-1}} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(-1)^i h_{\underbrace{1\cdots 1}_{i}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma) \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i h_{\underbrace{2\cdots 2}_{i}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i h_{\underbrace{k\cdots k}_{i}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma) \end{bmatrix} f = \mathbf{0}.$$

ここで，共変エルミート多項式 $h_{i_1\cdots i_j}$ に関する次の関係式が知られている：

$$(4.8)\qquad \phi_k(\boldsymbol{x}\,;\,\Sigma)h_{i_1\cdots i_j} = (-1)^j\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_j}}\right)\phi_k(\boldsymbol{x}\,;\,\Sigma).$$

ただし，$\phi_k(\boldsymbol{x}\,;\,\Sigma)$ は平均ベクトル $\mathbf{0}$，分散共分散行列 Σ の k-次元多変量正規密度関数である (cf. Barndorff-Nielsen and Cox (1989))．よって，

$$(4.9)\qquad \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\phi_k(\boldsymbol{x}\,;\,\Sigma)h_{\underbrace{\nu\cdots\nu}_{i}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^i}{\partial x_\nu^i}\right)\phi_k(\boldsymbol{x}\,;\,\Sigma) \qquad (1\le\nu\le k)$$

が成立する．(4.7) と (4.9) を比較すれば明らかに ϕ は基礎方程式の解の一つとなり，所要の多変量正規分布が誘導できることが分かる．

注 4.1. ここでは，$K_j, |\Delta\rangle$ を上のようにとったが，この設定は多変量正規分布を誘導するための一意的なものではない．このことは次の例で簡単に示すことができる．

(例) $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ を 3 次元実ベクトルとする．$n=2$ のとき，$K_1(\Lambda)=I$ (3×3 行列)，$K_2(\Lambda)=[I|I]$ (3×6 行列)，

$$|\Delta(\boldsymbol{x}\,;\,\Lambda)\rangle = \begin{bmatrix} -h_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma)+h_{12}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma)+h_{11}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma) \\ -h_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma)+h_{23}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma)+h_{22}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma) \\ -h_3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma)+h_{13}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma)+h_{33}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma) \end{bmatrix}$$

と設定しても 2 変量正規分布が誘導できる．なぜならば，これらを (4.5) 式に代入すると，

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -h_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma)+h_{12}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma)+h_{11}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma) \\ -h_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma)+h_{23}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma)+h_{22}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma) \\ -h_3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma)+h_{13}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma)+h_{33}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}\,;\,\Sigma) \end{bmatrix} f = \mathbf{0}$$

となるから，(4.8) 式より f が基礎方程式の解になっていることは明らかである．

以下の例は $n=2$ の場合に与えられる．

例 4.2. 多変量ガンマ分布

$$f(A\,;\,\Lambda)=\frac{\kappa^{bm}}{\Gamma_m(b)}|\Theta^{-1}|^b|A|^{b-\frac{m+1}{2}}\,\mathrm{etr}(-\kappa\Theta^{-1}A),$$

ここで，$A>0$（$m\times m$ 正値対称行列），$\Lambda=(\Theta,\,\kappa,\,b)$, $\Theta>0$, $\kappa>0$, $b>(m-1)/2$,

$$\begin{aligned}\Gamma_m(b)&=\int_{A>0}\mathrm{etr}(-A)|A|^{b-\frac{m+1}{2}}(dA)\\&=\pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\prod_{i=1}^{m}\Gamma\left(b-\frac{i-1}{2}\right).\end{aligned}$$

誘導. $K_1(\Lambda)=I$ $[m(m+1)/2\times m(m+1)/2$ 行列$]$, $K_2(\Lambda)=[I|0]_2$ $[m(m+1)/2\times {}_{m(m+1)/2+1}C_2$ 行列$]$,

$$|\Delta\rangle=\left[\begin{matrix}\Delta_{11}\\\Delta_{21}\\\Delta_{22}\\\vdots\\\Delta_{m,m-1}\\\Delta_{mm}\end{matrix}\right]\left.\vphantom{\begin{matrix}\Delta_{11}\\\Delta_{21}\\\Delta_{22}\\\vdots\\\Delta_{m,m-1}\\\Delta_{mm}\end{matrix}}\right\}m(m+1)/2$$

と設定すればよい．ただし，

$$\begin{aligned}\Delta_{ii}=&\left(b-\frac{m+1}{2}\right)\{-2A^{-1}E_{ii}A^{-1}+\mathrm{diag}(A^{-1}E_{ii}A^{-1})\}_{ii}\\&+\sum_{l=1}^{2}\left\{\left(b-\frac{m+1}{2}\right)(A^{-1})_{ii}-\kappa(\Theta^{-1})_{ii}\right\}^l,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{ij}=&\left(b-\frac{m+1}{2}\right)[-2A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}+\mathrm{diag}\{A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}\}]_{ij}\\&+\sum_{l=1}^{2}\left\{\left(b-\frac{m+1}{2}\right)(2A^{-1})_{ij}-\kappa(2\Theta^{-1})_{ij}\right\}^l\qquad(i>j).\end{aligned}$$

例 4.3. 多変量ベータ分布

$$f(A\,;\,\Lambda)=\frac{1}{B_m(a,\,b)}|A|^{a-\frac{m+1}{2}}|I-A|^{b-\frac{m+1}{2}},$$

ここで，$I>A>0$, $\Lambda=(a,\,b)$, $a,\,b>(m-1)/2$,

$$\begin{aligned}B_m(a,\,b)&=\int_{I>A>0}|A|^{a-\frac{m+1}{2}}|I-A|^{b-\frac{m+1}{2}}(dA)\\&=\frac{\Gamma_m(a)\Gamma_m(b)}{\Gamma_m(a+b)}.\end{aligned}$$

誘導. $K_1(\Lambda)=I$ $[m(m+1)/2\times m(m+1)/2$ 行列$]$, $K_2(\Lambda)=[I|0]_2$ $[m(m+1)/2\times {}_{m(m+1)/2+1}C_2$ 行列$]$,

$$|\Delta\rangle=\left[\begin{matrix}\Delta_{11}\\\Delta_{21}\\\Delta_{22}\\\vdots\\\Delta_{m,m-1}\\\Delta_{mm}\end{matrix}\right]\left.\vphantom{\begin{matrix}\Delta_{11}\\\Delta_{21}\\\Delta_{22}\\\vdots\\\Delta_{m,m-1}\\\Delta_{mm}\end{matrix}}\right\}m(m+1)/2$$

と設定すればよい．ただし，

$$\begin{aligned}\varDelta_{ii}=&\left(a-\frac{m+1}{2}\right)\{-2A^{-1}E_{ii}A^{-1}+\mathrm{diag}(A^{-1}E_{ii}A^{-1})\}_{ii}\\&+\left(b-\frac{m+1}{2}\right)[2(I-A)^{-1}E_{ii}(I-A)^{-1}-\mathrm{diag}\{(I-A)^{-1}E_{ii}(I-A)^{-1}\}]\\&+\sum_{l=1}^{2}\left[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)(A^{-1})_{ii}-\left(b-\frac{m+1}{2}\right)\{(I-A)^{-1}\}_{ii}\right]^{l},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varDelta_{ij}=&\left(a-\frac{m+1}{2}\right)[-2A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}+\mathrm{diag}\{A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}\}]_{ij}\\&+\left(b-\frac{m+1}{2}\right)[2(I-A)^{-1}(E_{ij}+E_{ji})(I-A)^{-1}\\&-\mathrm{diag}\{(I-A)^{-1}(E_{ij}+E_{ji})(I-A)^{-1}\}]\\&+\sum_{l=1}^{2}\left[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)(2A^{-1})_{ij}-\left(b-\frac{m+1}{2}\right)\{2(I-A)^{-1}\}_{ij}\right]^{l}\qquad (i>j).\end{aligned}$$

例 4.2 及び 4.3 において，$\varDelta$, Kを上記のように設定できることの数学的根拠は補遺で与えられる．

5. おわりに

本稿では，Matsunawa (1994) によって提唱されたノンパラメトリックな統計的不確定性関係を，モデルの持つより高次なデータ記述能力を用いた不等式によって改善できることが理論的に示された．また，この不等式の等号条件として，高階偏微分基礎方程式で表される一つの統計基礎方程式を得た．したがって，誤差行列 $\varDelta$ とそれに対する観測精度行列Kを適切に設定することにより，この方程式を解くことができたとき，必要な規格化定数が決まれば，より精密な多変量ノンパラメトリックモデルの誘導が可能となる．本稿では，よく知られた多変量分布に関し，与えられた方程式を満足する $\varDelta$, Kのより精密な設定が数学的に可能なことを示した．しかしながら，その方程式の形の複雑さから，他の具体的な多変量分布を誘導するまでには到っておらず，今後の研究課題である．また，実際のデータから $\varDelta$, Kをどのように与えるかは重要であり，このことも今後の課題としたい．

我々の提案した一般化されたノンパラメトリックな統計基礎モデルの中核にも指数型モデルがあることは明らかである．パラメトリックな考察で指数型分布族の誘導が可能なことと並行して，ノンパラメトリックな場合にも指数型分布族が本稿の基礎モデルの中に存在することを例示した．これはデータの記述能力として，対数を用いた量を導入していることに起因している．この事は，R. A. Fisher と E. Schrödinger が，それぞれ，対数尤度および波動関数の対数を，統計学および量子力学に導入したことと密接に関連していると思われる．しかし，なぜ彼らがそのような量を導入したのかは，それぞれの分野で今以て明確に説明出来ずにいるように見受ける．そのことの解明をすることにより，我々の統計基礎モデルと通常の指数型モデルの関係をより見通しよく展開できるものと思われる．なお，今のところ残念ながら，指数型分布に属さない統計基礎モデルの構築可能性について，我々は明確な事柄を述べる段階にない．データの記述能力として，対数に依存しない量を用いた時に適切な基礎方程式が得られるかもしれないとも考えられ，いくつかのケースを研究してみたが，対数に匹敵するほど扱いやすく，また，物理的にも意味を持ちそうな量を見出していない．この辺の考察も今後の興味ある研究課題と思われる．

補遺 1

例 4.2 においてK，Δが設定できることの数学的根拠を統計基礎モデルの型が分かっているものとして逆向きに検証する．

$$f(A;\Lambda)=\frac{\kappa^{bm}}{\Gamma_m(b)}|\Theta^{-1}|^b|A|^{b-\frac{m+1}{2}}\operatorname{etr}(-\kappa\Theta^{-1}A).$$

いま，f のAに関する一階偏微分は，次のようになる：

$$\begin{aligned}(f'_{ij}):&=\frac{\partial f(A;\Lambda)}{\partial A}\\&=\frac{\kappa^{bm}}{\Gamma_m(b)}|\Theta^{-1}|^b\Big[\Big(b-\frac{m+1}{2}\Big)|A|^{b-\frac{m+1}{2}}\{2A^{-1}-\operatorname{diag}(A^{-1})\}\operatorname{etr}(-\kappa\Theta^{-1}A)\\&\quad+|A|^{b-\frac{m+1}{2}}\operatorname{etr}(-\kappa\Theta^{-1}A)[-\kappa\{2\Theta^{-1}-\operatorname{diag}(\Theta^{-1})\}]\Big]\\&=\Big[\Big(b-\frac{m+1}{2}\Big)\{2A^{-1}-\operatorname{diag}(A^{-1})\}-\kappa\{2\Theta^{-1}-\operatorname{diag}(\Theta^{-1})\}\Big]f(A;\Lambda).\end{aligned}$$

また，$\partial f(A;\Lambda)/\partial A$ のAのある固定された (i,j) 成分に関する微分は，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a_{ii}}\Big(\frac{\partial f(A;\Lambda)}{\partial A}\Big)&=\Big(\frac{\partial f'_{ij}}{\partial a_{ii}}\Big)\\&=\Big[\Big(b-\frac{m+1}{2}\Big)\{-2A^{-1}E_{ii}A^{-1}+\operatorname{diag}(A^{-1}E_{ii}A^{-1})\}\\&\quad+\Big[\Big(b-\frac{m+1}{2}\Big)\{2A^{-1}-\operatorname{diag}(A^{-1})\}-\kappa\{2\Theta^{-1}-\operatorname{diag}(\Theta^{-1})\}\Big]\\&\quad\times\Big[\Big\{\Big(b-\frac{m+1}{2}\Big)(A^{-1})_{ii}-\kappa(\Theta^{-1})_{ii}\Big\}I\Big]\Big]f(A;\Lambda),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\Big(\frac{\partial f(A;\Lambda)}{\partial A}\Big)&=\Big(\frac{\partial f'_{ij}}{\partial a_{ij}}\Big)\\&=\Big[\Big(b-\frac{m+1}{2}\Big)[-2A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}+\operatorname{diag}\{A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}\}]\\&\quad+\Big[\Big(b-\frac{m+1}{2}\Big)\{2A^{-1}-\operatorname{diag}(A^{-1})\}-\kappa\{2\Theta^{-1}-\operatorname{diag}(\Theta^{-1})\}\Big]\\&\quad\times\Big[\Big\{\Big(b-\frac{m+1}{2}\Big)(2A^{-1})_{ij}-\kappa(2\Theta^{-1})_{ij}\Big\}I\Big]\Big]f(A;\Lambda)\qquad(i\neq j)\end{aligned}$$

と書くことができる (cf. Dwyer (1967))．ここで，E_{ij} は (i,j) 成分が 1，その他の成分が 0 となるような $m\times m$ 行列，$(A^{-1})_{ij}$, $(\Theta^{-1})_{ij}$ はそれぞれ，A^{-1}, Θ^{-1} の (i,j) 成分を表す．

よって，f の 2 階偏微分は辞書式に並べかえると次のように表される：

$$\left|\frac{\partial^2 f(A;\Lambda)}{\partial A^2}\right\rangle_l=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial a_{11}^2}\\\frac{\partial^2 f}{\partial a_{21}^2}\\\vdots\\\frac{\partial^2 f}{\partial a_{mm}^2}\\\frac{\partial^2 f}{\partial a_{11}\partial a_{21}}\\\vdots\\\frac{\partial^2 f}{\partial a_{m,m-1}\partial a_{mm}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f''_{11}\\f''_{21}\\\vdots\\f''_{mm}\\*\\\vdots\\*\end{bmatrix}.$$

ただし,

$$f''_{ii}=\left[\left(b-\frac{m+1}{2}\right)\{-2A^{-1}E_{ii}A^{-1}+\mathrm{diag}(A^{-1}E_{ii}A^{-1})\}_{ii}\right.$$
$$\left.+\left\{\left(b-\frac{m+1}{2}\right)(A^{-1})_{ii}-\kappa(\Theta^{-1})_{ii}\right\}^2\right]f(A;\Lambda),$$

$$f''_{ij}=\left[\left(b-\frac{m+1}{2}\right)[-2A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}+\mathrm{diag}\{A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}\}]_{ij}\right.$$
$$\left.+\left\{\left(b-\frac{m+1}{2}\right)(2A^{-1})_{ij}-\kappa(2\Theta^{-1})_{ij}\right\}^2\right]f(A;\Lambda)\qquad(i>j).$$

ここで，基礎方程式 (4.5) は

$$[I|0]_2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial A^2}\right\rangle_l+I\left|\frac{\partial f}{\partial A}\right\rangle_l-|\varDelta\rangle f=\mathbf{0}$$

の形で与えられるから,

$$\varDelta_{ii}f=f''_{ii}+f'_{ii}$$
$$=\left[\left(b-\frac{m+1}{2}\right)\{-2A^{-1}E_{ii}A^{-1}+\mathrm{diag}(A^{-1}E_{ii}A^{-1})\}_{ii}\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{2}\left\{\left(b-\frac{m+1}{2}\right)(A^{-1})_{ii}-\kappa(\Theta^{-1})_{ii}\right\}^l\right]f,$$

$$\varDelta_{ij}f=f''_{ij}+f'_{ij}$$
$$=\left[\left(b-\frac{m+1}{2}\right)[-2A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}+\mathrm{diag}\{A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}\}]_{ij}\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{2}\left\{\left(b-\frac{m+1}{2}\right)(2A^{-1})_{ij}-\kappa(2\Theta^{-1})_{ij}\right\}^l\right]f\qquad(i>j)$$

を得る．ただし，$|\varDelta\rangle=(\varDelta_{11},\varDelta_{21},\varDelta_{22},\cdots,\varDelta_{m,m-1},\varDelta_{mm})^t$ とする．

以上の結果から，K，$\varDelta$ を例 4.2 のように設定してよかったことが分かる．

補遺 2

例 4.3 についても，補遺 1 と同様の議論を展開する．

$$f(A;\Lambda)=\frac{1}{B_m(a,b)}|A|^{a-\frac{m+1}{2}}|I-A|^{b-\frac{m+1}{2}}.$$

f の一階偏微分は，次のようになる：

$$(f'_{ij}):=\frac{\partial f(A;\Lambda)}{\partial A}$$
$$=\frac{1}{B_m(a,b)}\left[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)|A|^{a-\frac{m+1}{2}}\{2A^{-1}-\mathrm{diag}(A^{-1})\}|I-A|^{b-\frac{m+1}{2}}\right.$$
$$\left.-|A|^{a-\frac{m+1}{2}}\left(b-\frac{m+1}{2}\right)|I-A|^{b-\frac{m+1}{2}}[2(I-A)^{-1}-\mathrm{diag}\{(I-A)^{-1}\}]\right]$$
$$=\left[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)\{2A^{-1}-\mathrm{diag}(A^{-1})\}\right.$$
$$\left.-\left(b-\frac{m+1}{2}\right)[2(I-A)^{-1}-\mathrm{diag}\{(I-A)^{-1}\}]\right]f(A;\Lambda).$$

また，$\partial f(A;\Lambda)/\partial A$ の A のある固定された (i,j) 成分に関する微分は,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_{ii}}\left(\frac{\partial f(A;\Lambda)}{\partial A}\right)&=\left(\frac{\partial f'_{ij}}{\partial a_{ii}}\right)\\
&=\Bigg[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)\{-2A^{-1}E_{ii}A^{-1}+\mathrm{diag}(A^{-1}E_{ii}A^{-1})\}\\
&\quad+\left(b-\frac{m+1}{2}\right)[2(I-A)^{-1}E_{ii}(I-A)^{-1}-\mathrm{diag}\{(I-A)^{-1}E_{ii}(I-A)^{-1}\}]\\
&\quad+\left[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)\{2A^{-1}-\mathrm{diag}(A^{-1})\}-\left(b-\frac{m+1}{2}\right)[2(I-A)^{-1}-\mathrm{diag}\{(I-A)^{-1}\}]\right]\\
&\quad\times\left[\left[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)(A^{-1})_{ii}-\left(b-\frac{m+1}{2}\right)\{(I-A)^{-1}\}_{ii}\right]I\right]\Bigg]f(A;\Lambda),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\left(\frac{\partial f(A;\Lambda)}{\partial A}\right)&=\left(\frac{\partial f'_{ij}}{\partial a_{ij}}\right)\\
&=\Bigg[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)[-2A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}+\mathrm{diag}\{A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}\}]\\
&\quad+\left(b-\frac{m+1}{2}\right)[2(I-A)^{-1}(E_{ij}+E_{ji})(I-A)^{-1}-\mathrm{diag}\{(I-A)^{-1}(E_{ij}+E_{ji})(I-A)^{-1}\}]\\
&\quad+\left[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)\{2A^{-1}-\mathrm{diag}(A^{-1})\}-\left(b-\frac{m+1}{2}\right)[2(I-A)^{-1}-\mathrm{diag}\{(I-A)^{-1}\}]\right]\\
&\quad\times\left[\left[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)(2A^{-1})_{ij}-\left(b-\frac{m+1}{2}\right)\{2(I-A)^{-1}\}_{ij}\right]I\right]\Bigg]f(A;\Lambda)\qquad(i\neq j)
\end{aligned}$$

と書くことができるから，f の2階偏微分は次のように表される：

$$\left|\frac{\partial^2 f(A;\Lambda)}{\partial A^2}\right\rangle_l=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial a_{11}^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_{21}^2}\\ \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_{mm}^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_{11}\partial a_{21}}\\ \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_{m,m-1}\partial a_{mm}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f''_{11}\\ f''_{21}\\ \vdots\\ f''_{mm}\\ *\\ \vdots\\ *\end{bmatrix}.$$

ただし，

$$\begin{aligned}
f''_{ii}=&\Bigg[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)\{-2A^{-1}E_{ii}A^{-1}+\mathrm{diag}(A^{-1}E_{ii}A^{-1})\}_{ii}\\
&+\left(b-\frac{m+1}{2}\right)[2(I-A)^{-1}E_{ii}(I-A)^{-1}-\mathrm{diag}\{(I-A)^{-1}E_{ii}(I-A)^{-1}\}]_{ii}\\
&+\left[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)(A^{-1})_{ii}-\left(b-\frac{m+1}{2}\right)\{(I-A)^{-1}\}_{ii}\right]^2\Bigg]f(A;\Lambda),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''_{ij}=&\Bigg[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)[-2A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}+\mathrm{diag}\{A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}\}]_{ij}\\
&+\left(b-\frac{m+1}{2}\right)[2(I-A)^{-1}(E_{ij}+E_{ji})(I-A)^{-1}\\
&-\mathrm{diag}\{(I-A)^{-1}(E_{ij}+E_{ji})(I-A)^{-1}\}]_{ij}\\
&+\left[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)(2A^{-1})_{ij}-\left(b-\frac{m+1}{2}\right)\{2(I-A)^{-1}\}_{ij}\right]^2\Bigg]f(A;\Lambda)\qquad(i>j).
\end{aligned}$$

ここで，基礎方程式は

$$[I|0]_2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial A^2}\right\rangle_l + I\left|\frac{\partial f}{\partial A}\right\rangle_l - |\Delta\rangle f = \mathbf{0}$$

で与えられるから,

$$\begin{aligned}
\Delta_{ii}f &= f''_{ii} + f'_{ii} \\
&= \Bigg[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)\{-2A^{-1}E_{ii}A^{-1}+\mathrm{diag}(A^{-1}E_{ii}A^{-1})\}_{ii} \\
&\quad + \left(b-\frac{m+1}{2}\right)[2(I-A)^{-1}E_{ii}(I-A)^{-1}-\mathrm{diag}\{(I-A)^{-1}E_{ii}(I-A)^{-1}\}] \\
&\quad + \sum_{l=1}^{2}\left[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)(A^{-1})_{ii}-\left(b-\frac{m+1}{2}\right)\{(I-A)^{-1}\}_{ii}\right]^l\Bigg]f,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{ij}f &= f''_{ij} + f'_{ij} \\
&= \Bigg[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)[-2A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}+\mathrm{diag}\{A^{-1}(E_{ij}+E_{ji})A^{-1}\}]_{ij} \\
&\quad + \left(b-\frac{m+1}{2}\right)[2(I-A)^{-1}(E_{ij}+E_{ji})(I-A)^{-1} \\
&\quad - \mathrm{diag}\{(I-A)^{-1}(E_{ij}+E_{ji})(I-A)^{-1}\}] \\
&\quad + \sum_{l=1}^{2}\left[\left(a-\frac{m+1}{2}\right)(2A^{-1})_{ij}-\left(b-\frac{m+1}{2}\right)\{2(I-A)^{-1}\}_{ij}\right]^l\Bigg]f \qquad (i>j)
\end{aligned}$$

を得る.

よって, K, Δ を例 4.3 のように設定してよかったことが分かる.

謝　辞

査読者の本稿に対する注意深い検討と有益なコメントに感謝します.

参 考 文 献

Barndorff-Nielsen, O. E. and Cox, D. R. (1989). *Asymptotic Techniques for Use in Statistics*, Chapman and Hall, London.

Bhattacharyya, A. (1946-1948). On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation, *Sankhyā*, 8, 1-14, 201-218, 315-328.

Cramér, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, New Jersey.

Dwyer, P. S. (1967). Some applications of matrix derivatives in multivariate analysis, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **62**, 607-625.

Matsunawa, T. (1994). 分布の起源——ノンパラメトリックな統計的不確定性関係と統計基礎方程式——, 統計数理, **42**(2), 197-214.

Rao, C. R. (1945). Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **37**, 81-91.

Improved Multivariate Nonparametric Statistical Uncertainty Relations

Takahiro Tsuchiya and Tadashi Matsunawa

(The Institute of Statistical Mathematics)

A multivariate nonparametric statistical uncertainty relation proposed by Matsunawa (1994, *Proc. Inst. Statist. Math.*, **42**, 197-214) is improved by giving a more accurate inequality. It is seen that we can improve the relation by introducing more accurate data description abilities of a nonparametric fundamental model. The abilities consist of higher order partial differentials of the model with respect to the underlying random matrix.

The basic idea is closely related to the so-called Bhattacharyya inequality (Bhattacharyya (1946-1948, *Sankhyā*, 8, 1-14, 201-218, 315-328)) which was obtained by improving the Cramér-Rao inequality (Rao (1945, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **37**, 81-91), Cramér (1946, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, New Jersey)) in parametric estimation theory. However, our understanding of the relation is different from the case of the parametric estimation theory. That is to say, we consider the nonparametric and multivariate cases, and also give the inequality only for a single random matrix. As the equality condition of the resultant inequality, we obtain an improved nonparametric statistical fundamental equation expressed by the higher order partial differential equation. Solving this equation under the suitable conditions, we can construct more accurate multivariate nonparametric fundamental models in principle. As examples, some familiar univariate and multivariate statistical models are constructed based on the equation.

Key words: Nonparametric statistical uncertainty relation, nonparametric statistical fundamental equation, multivariate distributions.