

多変量時系列モデルによる 経済システムの動的解析

広島大学* 加 藤 比 呂 子
統計数理研究所 石 黒 真 木 夫

(1997年7月 受付)

1. はじめに

経済時系列データを眺めていつも考えることは、何故そのような変動を示すのか、データの背後に何の意味が隠されているかということである。変動の原因には、経済システムを揺るがすような事件はもちろん、逐次行なわれている人為的操作、また、天候、季節や曜日、休日の変化などが上げられる。

我々の興味は、時系列モデルを用いて、データの裏に潜む「何か」を調べることにある。特に一つのデータ系列だけではなく他の関連しそうな系列も合わせ、その相互関係を示す「何か」を調べたい。多次元の時系列データから構成されるシステムのダイナミクスを把握することは、同時にそれぞれの変動を得ることに至った原因を探ることになる。複雑な経済システムを、高々数系列の時系列データによる解析で完全に把握できるとは考えていない。難しい経済理論は何も知らないけれど、データがもつ情報だけでどこまで経済システムの動向や構成が調べられるかということが我々の大きな関心である。

季節調整法とは、原系列から季節変動を除去する手続きの事を示すの言うまでもない。調整済みの系列を、傾向変動や循環変動の分析に用いるのである。我々の行なわなければならないことは、多変量時系列データの季節調整と、さらに循環変動成分について、変量相互のダイナミクスを調べることである。すでに我々は、多変量時系列の季節調整法として、トレンド、季節変動、循環変動を同時に分解するための MARTS モデル (Multivariate AR around Trend and Seasonal component model) を開発した (Kato (1995))。多変量のデータに対し、一系列ずつの季節調整を行なって得られた循環変動成分を解析するよりも、この手法により循環変動成分を抽出した方が多変量相互の関係に関する情報をより正確に抽出することができる (Kato (1995), Kato et al. (1996))。また、循環変動の分析については、多変量自己回帰モデルによる統計的システム解析ツール ARdock (石黒 (1989), Ishiguro (1994), 石黒・大矢 (1995)) を用いることで、与えられたデータ間の関係を分析し、全体のシステムの動向を推定することができる。これら、多変量時系列データの季節調整から、変量相互の動的解析の一連の処理による実データへの分析例として、日本経済における鉱工業生産指数と物価指数の関係 (Kato et al. (1996))、鉱工業在庫指数と物価指数の関係 (石黒・加藤 (1995)) が上げられる。

本稿で報告する内容については、これまでの実データへの適用で考えてきた、「物価の変動を左右するものは、何か」という素朴な疑問 (石黒・加藤 (1995)) が発端になっている。従って本稿では、石黒・加藤 (1995) による結果に基づいてデータ解析を進めている。物価に関連する経済データはいろいろ考えられるが、全くの素人的な判断で、在庫・物価・通貨量の組合

* 工学部共通講座応用数学講座：〒739 広島県東広島市鏡山 1-4-1.

せを考え分析をおこなった。一連の手法を用いて3変量時系列データの季節調整を同時におこない、得られた循環変動成分に関する解析から、在庫・物価・通貨量からなる極めて単純な経済システムの特徴について調べた内容を報告する。

2. データ

在庫・物価・通貨量の関係を調べるにあたり、本稿で取り扱うデータは、石黒・加藤(1995)で用いた通産省による1990年度基準鉱工業在庫指数、日本銀行による1990年度基準総合卸売物価指数と、これも日本銀行による M_2+CD 末残データとした(図1)。月次 M_2+CD 末残データは、

- ・月末の決済需要による通貨供給の増加
- ・月末日の曜日構成による変化
- ・事業年度の飛び上がり

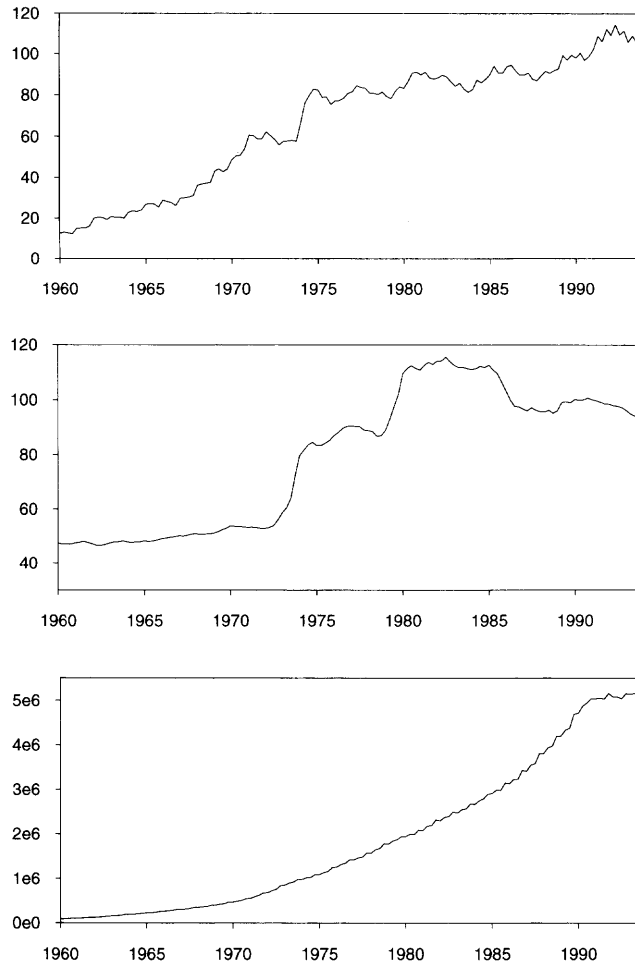


図1. 上段：1990年度基準鉱工業在庫指数，中段：1990年度基準総合卸売物価指数，下段： M_2+CD （末残）。

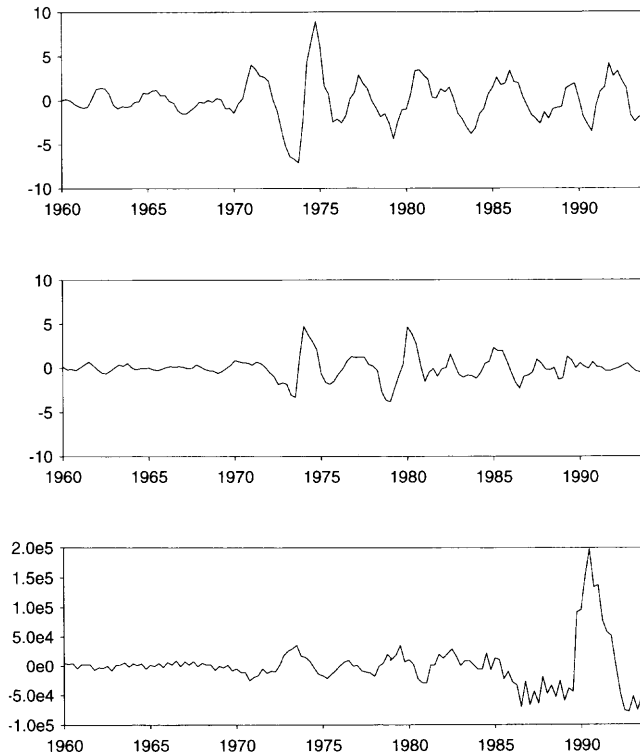


図2. 上段から順に在庫指数，物価指数，M₂+CDの「不規則変動」。

等様々な要因で攪乱を受けやすいと言われている。本来ならば、その点を考慮して平均残高統計を使うのが経済分析では一般的のようであるが、入手したデータが末残であるため、本稿ではこれを用いることにした。

データは、1960年1月から1993年12月まで、それぞれ3、6、9、12月の値をとって四半期データとした。これらのデータを一変量ベイズ型季節調整モデルBAYSEA (Ishiguro and Akaike (1985)) を用いて非常に硬いトレンドを除去すると、図2に示す不規則変動が得られる。この図をみると、データの最初と最後の部分の特性が違って見える。従って本稿では、1968年から1988年にかけての20年分のスパンを取り出して解析することにした。

3. MARTS モデル

3.1 MARTS モデル

K 次元の時系列を $\mathbf{y}_n = (y_{1n}, \dots, y_{Kn})^T$ ($n=1, \dots, N$) で表すことにする。我々のデータでは $K=3$ である。 $(\cdot)^T$ で転置を示す。MARTS モデルは \mathbf{y}_n が循環変動成分ベクトル \mathbf{x}_n 、トレンド成分 \mathbf{t}_n 、周期 L の季節変動成分 $\mathbf{s}_n = (s_{1n}, s_{2n}, \dots, s_{Kn})^T$ と白色雑音成分 \mathbf{r}_n という4つの成分から

$$(3.1) \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n + \mathbf{t}_n + \mathbf{s}_n + \mathbf{r}_n,$$

という形で合成されるものとする。循環変動成分ベクトル \mathbf{x}_n は自己回帰過程 (AR 過程)

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \sum_{m=1}^M \mathbf{A}_m \mathbf{x}_{n-m} + \boldsymbol{\epsilon}_n \\ \boldsymbol{\epsilon}_n &\sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{AR}) \end{aligned}$$

で生成されるものとする。\$\mathbf{x}_n\$ と \$\mathbf{A}_m\$ はそれぞれ、\$K\$ 次元のベクトルと行列である。\$\boldsymbol{\epsilon}_n \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})\$ はあるベクトルが平均 \$\boldsymbol{\mu}\$、分散 \$\boldsymbol{\Sigma}\$ の (多次元) 正規分布に従うことを示す記法である。トレンドベクトル \$\mathbf{t}_n = (t_{1n}, t_{2n}, \dots, t_{Kn})^T\$ の成分は \$\Delta t_n = t_n - t_{n-1}\$ として差分方程式

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Delta^d t_{kn} &= \xi_{kn} \quad (k=1, \dots, K, n=1, \dots, N), \\ \boldsymbol{\xi}_n &= (\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{Kn})^T \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_T) \end{aligned}$$

を満たすものとする。\$\mathbf{s}_n\$ に関しては

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \sum_{m=0}^{L-1} s_{k(n-m)} &= \eta_{kn} \quad (k=1, \dots, K, n=1, \dots, N), \\ \boldsymbol{\eta}_n &= (\eta_{1n}, \eta_{2n}, \dots, \eta_{Kn})^T \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_S) \end{aligned}$$

を仮定する。\$\{\boldsymbol{\xi}_n\}\$ と \$\{\boldsymbol{\eta}_n\}\$ は白色雑音とする。\$\xi_{kn}\$ や \$\eta_{kn}\$ の分散が小さければ \$\{t_{kn}\}\$ や \$\{s_{kn}\}\$ は滑らかな変動を示すことになる。\$\{r_n\}\$ も白色雑音であって \$r_n \sim N(0, \boldsymbol{\Sigma}_R)\$ とする。四半期データの場合 \$L=4\$ である。このモデルは Kitagawa (1981) による DECOMP モデルの多次元への拡張版である。

3.2 モデルの同定

上記の MARTS モデルは状態空間表現

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_n &= \mathbf{H}\mathbf{z}_n + r_n \\ \mathbf{z}_n &= \mathbf{F}\mathbf{z}_{n-1} + \mathbf{G}\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

で表すことができる。状態ベクトルは、

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_n^T &\equiv (\mathbf{x}_n^T, \mathbf{x}_{n-1}^T, \dots, \mathbf{x}_{n-M+1}^T, \mathbf{t}_n^T, \dots, \mathbf{t}_{n-d+1}^T, \mathbf{s}_n^T, \dots, \mathbf{s}_{n-L+2}^T) \\ \mathbf{v}_n^T &\equiv (\boldsymbol{\epsilon}_n^T, \boldsymbol{\xi}_n^T, \boldsymbol{\eta}_n^T) \end{aligned}$$

と表され(3.2), (3.3), (3.4)で仮定した各成分を状態推定により求める。モデルは線形でガウス分布に従うので各状態の分布を決める平均値と分散を

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{n|j} &\equiv E\{\mathbf{z}_n | \mathbf{Y}_j\}, \\ \mathbf{V}_{n|j} &\equiv E\{(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n|j})(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n|j})^T | \mathbf{Y}_j\} \end{aligned}$$

とおき、初期値の分布を \$\mathbf{z}_0 \sim N(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)\$、とすると、

$$\mathbf{z}_{0|0} = \boldsymbol{\mu}_0, \quad \mathbf{V}_{0|0} = \boldsymbol{\Sigma}_0$$

となる。Kalman filter のアルゴリズム

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{n|n-1} &= \mathbf{F}\mathbf{z}_{n-1|n-1}, \\ \mathbf{V}_{n|n-1} &= \mathbf{F}\mathbf{V}_{n-1|n-1}\mathbf{F}^T + \boldsymbol{\Sigma}_z, \\ \mathbf{K}_n &= \mathbf{V}_{n|n-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{V}_{n|n-1}\mathbf{H}^T + \boldsymbol{\Sigma}_R)^{-1}, \\ \mathbf{z}_{n|n} &= \mathbf{z}_{n|n-1} + \mathbf{K}_n(\mathbf{y}_n - \mathbf{H}\mathbf{z}_{n|n-1}), \\ \mathbf{V}_{n|n} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n\mathbf{H})\mathbf{V}_{n|n-1} \end{aligned}$$

により、逐次的に状態推定を行なうことができ、モデルに仮定した各成分を求めることができる。

MARTS モデルはベイズ型時系列モデルである。今未知パラメータを

$$\Theta = \{A_1, \dots, A_M, \Sigma_{AR}, \Sigma_T, \Sigma_S, \Sigma_R, \mu_0, \Sigma_0\}$$

とする。prior として、パラメータが与えられた時の $Z_n = (z_1, \dots, z_n)$ の分布を考え

$$\pi(Z_n | \Theta) = \phi_p(z_0 | \mu_0, \Sigma_0) \prod_{n=1}^N \phi_p(z_n | Fz_{n-1}, \Sigma_z)$$

と表すことができる。ただし、 $\phi_p(\cdot | \mu, \Sigma)$ は p 変数正規分布 $N(\mu, \Sigma)$ の確率密度関数を表し $\Sigma_z = E\{Gv_nv_n^T G^T\}$ 、また p は z_n の次元 $p = KM + Kd + K(L-1)$ を表す。 Z_n が与えられた時の $Y_n = (y_1, \dots, y_n)$ の分布は

$$f(Y_n | Z_n, \Theta) = \prod_{n=1}^N \phi_k(y_n | Hz_n, \Sigma_R)$$

となり Y_n の周辺分布は

$$f(Y_n | \Theta) = \int f(Y_n | Z_n, \Theta) \pi(Z_n | \Theta) dZ_n$$

となる。ここで、 $f(y_n | Y_{n-1}, \Theta) = f(Y_n | \Theta) / f(Y_{n-1} | \Theta)$ より

$$\begin{aligned} f(Y_n | \Theta) &= \prod_{n=1}^N f(y_n | Y_{n-1}, \Theta) \\ &= \prod_{n=1}^N \phi_k(y_n | Fz_{n|n-1}, HV_{n|n-1}H^T + \Sigma_R) \end{aligned}$$

という形で表すことができる。パラメータ Θ の対数尤度は

$$l(\Theta) = \sum_{n=1}^N \log \phi_k(y_n | Fz_{n|n-1}, HV_{n|n-1}H^T + \Sigma_R)$$

となる。

$l(\Theta)$ の数値的最適化で Θ の最尤推定値 $\hat{\Theta}$ を求めることができる。AR の次数 M の選択などは

$$AIC = -2l(\hat{\Theta}) + 2 \times (\text{自由なパラメータの数})$$

の最小化によることにする。今回の解析では $d=2$ に固定して μ_0 に t_{-1} と t_0 に相当する 6 つのパラメータを持たせ、 Σ_{AR} 以外の Σ_* を対角行列としたので自由なパラメータの数は $M=1$ の場合で 30 となった。

数値的最適化には DALL (Ishiguro and Akaike (1989)) を用いた。

3.3 未知パラメータ推定のための初期値の設定について

最尤推定値を求めるにあたり、DALL に与える初期値の設定については様々な手法が考えられる。我々は、BAYSEA による不規則変動成分から相互の関係に関する情報をより多く抽出する分析の結果から初期値を作り出した。以下にその方法を簡単に示す。

BAYSEA では 1 変量の時系列 $\{y_n\}$ を

$$y_n = t_n + s_n + r_n, \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

の形に分解できる。ここで t_n , s_n および r_n はそれぞれ、トレンド (サイクル) 成分、季節変動成分、不規則変動成分である。 $\{t_n\}$ と $\{s_n\}$ は最小二乗法により求める。それはコスト

$$\sum_{n=1}^N (y_n - t_n - s_n)^2 + u^2 \sum_{n=1}^N (\Delta^d t_n)^2 + v^2 \sum_{n=1}^N (\Delta^l s_n)^2 + w^2 \sum_{n=1}^N \left(\sum_{j=0}^{L-1} s_{n-j} \right)^2$$

の最小化を満たすことにより得られる。

このコストの重み u^2 , v^2 , w^2 は、トレンドや季節変動がどの位の割合でどの程度滑らかに推定するかを決めるもので、プログラムの中では DD と $RIGID$ という変数によって

$$\begin{aligned} u &= DD/RIGID \\ v &= DD \\ w &= DD \times RIGID/\sqrt{L} \end{aligned}$$

という形で制御される。 DD と $RIGID$ は情報量規準 ABIC (Akaike (1980)) の最小化で選ばれる。

パラメータの初期値を求める際には、さらに *Abuse Factor* として AF という変数を導入し、 u の式を

$$u = AF \times DD/RIGID$$

とした。 $AF=1.0$ で本来の BAYSEA になる。 AF を導入した理由は、トレンド成分の分散を小さくしてわざと硬いトレンドを得るためである。各系列から硬いトレンドを取り除けば残りの不規則変動成分には変量相互の関係等を含むより多くの情報が残されると考えられる。各系列の平均非定常な部分をおおざっぱに取り除き、残りの系列に対し多変量 AR モデルをあてはめ、そこで得られたパラメータを循環変動成分の初期値とする。

在庫指数のデータに BAYSEA を適用した結果を表 1 に示す。 $d=2$, $l=1$ に固定した範囲で $RIGID$ と DD のいくつかの組合せについて求めた ABIC の値である。この表中で ABIC の意味で最良の $DD=1.05$, $RIGID=2.5$, $AF=1.0$ の場合である。“ t_n+r_n ” の分解の ABIC が大きいことがこのデータの季節変動が大きいことを示している。トレンドをもっと滑らかにするために $AF=30.0$ としてみた結果を図 3(a) に示す。トレンドが滑らかになった代わりに不規則変動がゆるむようになった。この場合の ABIC の値が表 1 の最下段にある。ABIC の値が悪いのは、不規則変動が白色雑音に近い結果でなくくせが残る結果となっているからである。同様な卸売物価指数、 M_2+CD の季節調整の結果を表 2, 3 と図 3(b), (c) にまとめた。

Σ_T と Σ_S にはそれぞれ BAYSEA によるトレンドと季節変動成分の推定値から得られた値を与え、 Σ_R は 1.0 を要素とする対角行列とした。石黒・加藤 (1995) の結果から、AR モデルの次数は $M=1$ に固定し、 A_1 と Σ_{AR} には“不規則変動”の推定値にあてはめた AR モデルのパラメータを与えた。

最適化の結果を表 4 にまとめる。

表 1. 在庫指数の季節調整.

分解	DD	$RIGID$	AF	ABIC
$t_n + s_n + r_n$	1.05	1.0	1.0	206.11
$t_n + s_n + r_n$	1.05	2.5	1.0	180.53
$t_n + s_n + r_n$	2.50	5.0	1.0	184.92
$t_n + r_n$	1.05	1.0	1.0	195.04
$t_n + s_n + r_n$	1.05	2.5	30.0	296.64

表 2. 卸売物価指数の季節調整.

分解	DD	$RIGID$	AF	ABIC
$t_n + s_n + r_n$	1.49	10.0	1.0	85.68
$t_n + s_n + r_n$	2.50	20.0	1.0	83.00
$t_n + s_n + r_n$	5.00	30.0	1.0	84.36
$t_n + r_n$	1.05	1.0	1.0	115.24
$t_n + s_n + r_n$	2.50	20.0	30.0	192.46

表 3. M_2+CD 季節調整.

分解	DD	$RIGID$	AF	ABIC
$t_n + s_n + r_n$	1.05	0.5	1.0	143.39
$t_n + s_n + r_n$	1.05	1.0	1.0	125.85
$t_n + s_n + r_n$	1.77	2.0	1.0	132.52
$t_n + r_n$	5.94	1.0	1.0	240.58
$t_n + s_n + r_n$	1.05	1.0	30.0	318.66

表 4. DALL による最適化.

対数尤度 (初期値)	-670.3
対数尤度 (収束値)	-547.6
パラメータ数	30
AIC	1155.2

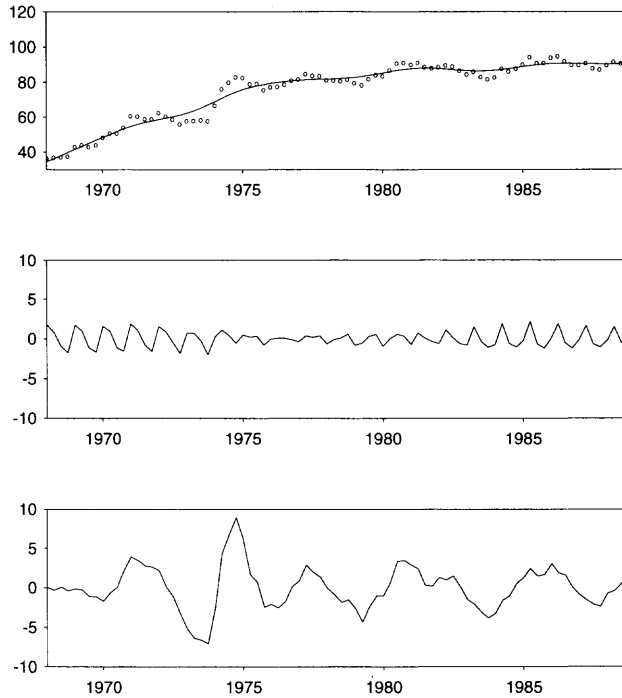


図 3(a). 1968 年から 1988 年にかけての在庫指数 (上段○印), そのトレンド (上段実線), 季節変動 (中段) および不規則変動 (下段).

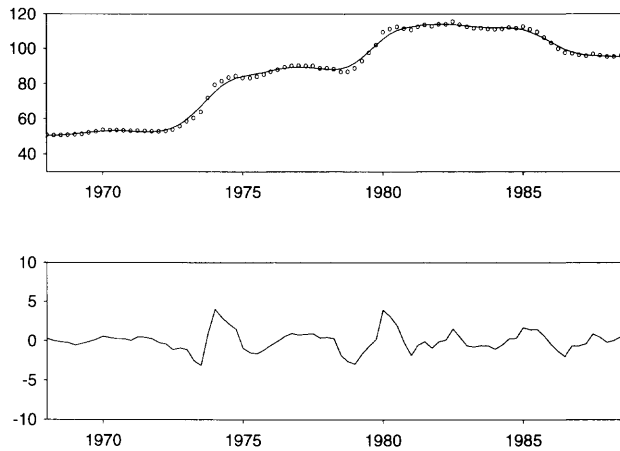


図 3(b). 1968 年から 1988 年にかけての物価指数 (上段○印), そのトレンド (上段実線) および不規則変動 (下段).

4. ARdock による統計的システム解析

4.1 ARdock の紹介

ARdock の語源は「人間ドック」にある。主な役割は多変量 AR モデルをデータへ適用し、変量間相互の関係やフィードバックシステムの動向を対話形式で分析することである。言うな

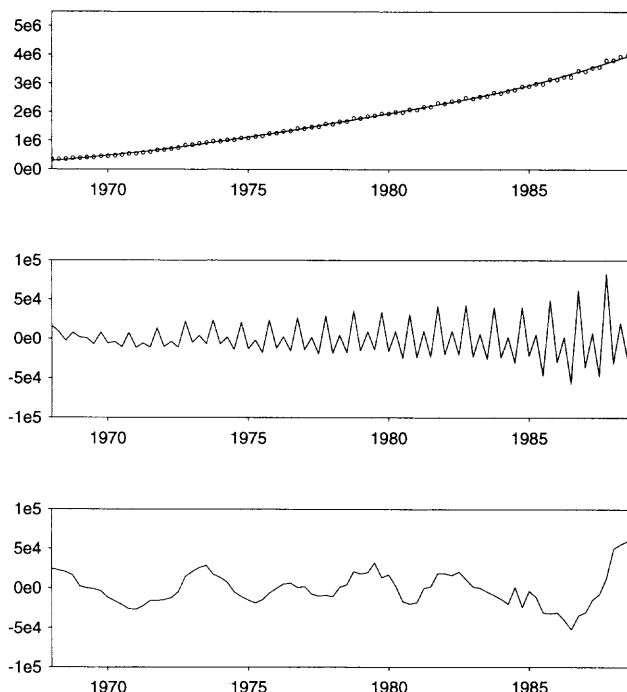


図3(c). 1968年から1988年にかけての M_2+CD (上段○印), そのトレンド (上段実線), 季節変動 (中段) および不規則変動 (下段).

れば, 多変量 AR モデルを使って, 与えられたデータから構成されるシステムの「診断」をおこなえるという便利なプログラムである. ARdock による解析のバックグラウンドは赤池・中川 (1972) による線形システムと AR モデルの関係にある. その研究成果は 1972 年より時系列解析プログラムパッケージ TIMSAC を通して様々な分野で実用化されていることは周知の通りである. ARdock は TIMSAC をさらに多変量相互間の関係を解析する者にとって使いやすい形式へ編集し直し, また, さらに新しい手順も加え, 様々なデータに対するシステム解析をよりわかりやすく簡単におこなえるように作成されている. プログラムの内容を簡単にまとめると,

1. 多変量 AR モデルによるシステムの同定
2. システム解析をおこなう上で, フィードバック経路の切断をおこなうための, AR の係数行列の要素に 0 をかけるマスク操作
3. 各応答関数 (周波数, インパルス, ステップ応答関数) の計算
4. パワースペクトル, 相対ノイズ寄与率の計算
5. データとして, AR の係数行列と分散共分散行列を与えた際, シミュレーションをおこなうことができるが, その時の各変量のパワー成長過程を調べることで, データ全体としての安定性とシステム各部での動向を調べること
6. マスク操作により, ある変量から他の変量への経路特性を調べること
7. 状態空間モデルとダイナミックプログラミングによる最適制御設計

となる. 本稿では, MARTS モデルの循環変動成分の特性を調べるために 2 から 5 の項目を使

用した。その詳細については次に述べる。

4.2 システムの動的解析

モデルの循環変動成分の式(3.2)に仮定した多変量 AR モデルの係数行列と分散共分散行列の値が得られると、周波数応答関数

$$(4.1) \quad \mathbf{F}(f) = \left[\mathbf{I} - \sum_{m=1}^M \mathbf{A}_m \exp(-i2\pi fm) \right]^{-1}$$

が計算できる。式(4.1)より、パワースペクトル

$$(4.2) \quad \mathbf{P}(f) = \mathbf{F}(f) \boldsymbol{\Sigma}_{AR} \mathbf{F}^*(f), \quad (0 \leq f \leq 0.5/\Delta)$$

が算出される。ここで Δ はサンプリング間隔を示す。パワースペクトルは多変量の各変量を持つ物理的な特性を示すもので、式(4.2)からもわかるように、その対角成分は、個々の系列のパワーを表すが、一変量のみで計算した時のパワーとは違い、他の変量から寄与を特定できる可能性がある。 $\boldsymbol{\Sigma}_{AR}$ が対角行列 (に近い形) であれば、ノイズ寄与率

$$r_{ji}(f) = \frac{|A_{ji}(f)|^2 \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^K |A_{ji}(f)|^2 \sigma_j^2}, \quad (j=1, \dots, K, i=1, \dots, K, 0 \leq f \leq 0.5)$$

により、 $\{x_i(n)\}$ のイノベーション $\{v_i(n)\}$ のパワーがある周波数 f での $\{x_j(n)\}$ のパワーに対してどれくらい寄与するかを算出することができる。ここで、 σ_i^2 と σ_j^2 は $\boldsymbol{\Sigma}_{AR}$ の第 i 番目と第 j 番目の対角要素を示す。

多変量データで構成されたシステムに仮に変量間のフィードバック関係が成り立っているとしよう。AR の係数行列 A_m から算出されるインパルス応答関数はシステムを理解するために便利な関数の一つである。式(3.2)の多変量 AR モデルを用いてインパルス応答を計算することができる。しかし、実際のシステムでは、サブシステム間にフィードバックがかかっているとすると、それぞれのサブシステムから過去に出力されていた値と、各サブシステムの持つ固有のノイズは無相関である保証がない。そこで、ノイズの白色化が必要となる (赤池・中川 (1972))。

ここで AR モデルの係数行列 A_m の (k, j) 成分を A_{kjm} としよう。ある k 番目の変量 x_{kn} は、

$$(4.3) \quad x_{kn} = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^K A_{kjm} x_{j(n-m)} + \epsilon_{kn}$$

と表すことができる。ここで

$$(4.4) \quad \begin{aligned} a_{kjm} &= A_{kjm} + \sum_{n=1}^{m-1} b_{kn} a_{kj(m-n)} \quad (k \neq j) \\ b_{km} &= A_{kkm} \end{aligned}$$

を定義すると、システム全体のダイナミクスを

$$(4.5) \quad x_{kn} = \sum_{j \neq k} \sum_{m=1}^{\infty} a_{kjm} x_{j(n-m)} + u_{kn}$$

$$(4.6) \quad u_{kn} = \sum_{m=1}^M b_{km} u_{k(n-m)} + \epsilon_{kn}$$

と書き直すことができる。(4.5)式では、 a_{kjm} が入力 x_j から出力 x_k へのインパルス応答関数である。 u_{kn} は(4.6)式で生成されるカラーノイズである。 k チャンネルのサブシステムに入る単

位インパルスは、実はこの u_{kn} に入ること、

$$(4.7) \quad u_{kn} = \begin{cases} 1 & n=0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるが、それは AR モデルのノイズ系列部分に

$$(4.8) \quad \epsilon_{kn} = \begin{cases} -b_{kn} & (0 \leq n \leq M, n=0 \text{ のとき } b_{kn} = -I), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が入ることと等価である。AR モデルにおいて、 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{-1} = \dots = 0$ として、(4.8) で得られた ϵ_{kn} を入力することにより、インパルス応答関数を得ることができる。式(4.6)の関係をもつシステムにおいて、様々な状況下の応答関数を計算することで、その特性を把握することができる。

また、変量間のフィードバック経路が切断されたときのシステムの変化をオープンループのインパルス応答関数で調べることができる。こういった切断は、実際のシステムでおこなうのは容易なことではないが、仮想的なシステムの上で実行することにより、その動的変化を実際のシステムと照らし合わせながら検討することができる。例えば変量2から変量1へのフィードバック経路を切断するとき、AR モデルの係数行列を

$$\mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} a_{11m} & 0 \\ a_{21m} & a_{22m} \end{pmatrix}, \quad (m=1, 2, \dots, M)$$

というように操作する。このように、フィードバック経路を切断することを表すのに、その該当する要素を0にすることをマスク操作と呼んでいる。経路の切断とはいっても、この場合、予測誤差の項については手を加えないまま、係数行列の部分にだけマスク操作を施す。ある変量から変量への経路特性を示す係数の部分にマスクをかけることにより、システム全体の中でフィードバックが正と負のどちらにかかっているか、またその影響による変量のパワーの変化をこの係数を用いて作成したシミュレーション値からみることができる。それらの解析結果を合わせ、各変量がシステム全体に対してどういう役割をもつか判断することができる。

5. 在庫・物価・通貨量のシステム解析

2章で紹介した3系列のデータについて、MARTSモデルと ARdock による解析結果を示

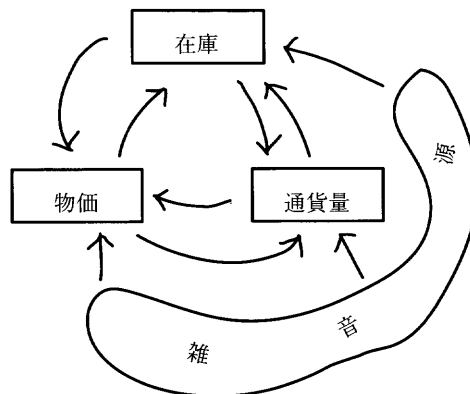


図4. 各チャンネルを、1:在庫, 2:物価, 3:通貨量と仮定したフィードバックシステムの図。

す。データの名称は、以下省略した形で在庫、物価、通貨量と呼ぶことにする。それぞれの変量から成るフィードバックシステムを仮定する (図4)。

まず、MARTS モデルから得られた AR モデルの係数行列、分散共分散行列から、各変量の循環変動成分のパワースペクトルを計算した (図5 左側)。3 変量ともほぼ 4 年周期のところにピークがみられる。それぞれのトレンド回りの循環変動において、3 変量の相互作用から得られたものである。パワースペクトルの隣に並んでいるのが、各変量に対する他の変量からのノイズ寄与率である (図5 右側)。通貨量から各変量への寄与が少ないことがわかる。また、通貨量のパワーは在庫と物価のノイズから由来している様子がみられる。次にそれらの相互作用におけるシステムの動特性を調べた結果を以下に示す。

図4 に示したフィードバック関係が成り立っている場合の、各変量のシミュレーション値を図6 に示す。実線は在庫、破線は物価、点線は通貨量の循環変動を示す。

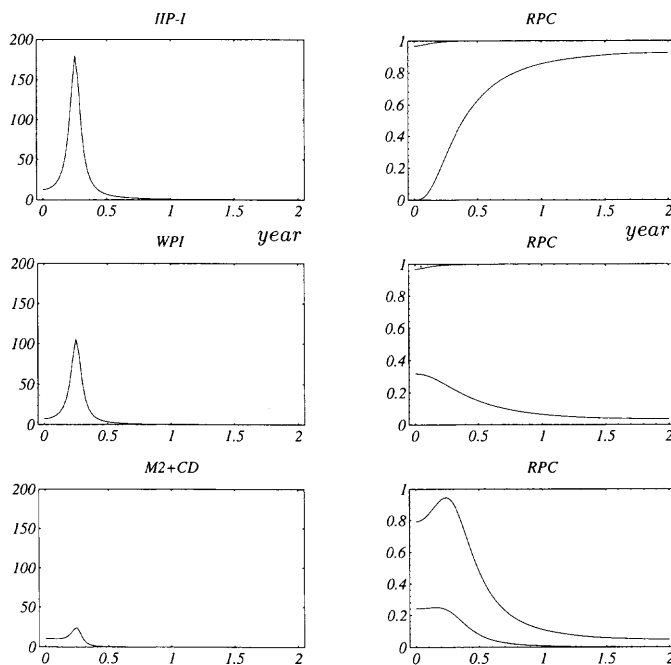


図5. 上段から在庫指数、物価指数、 M_2+CD のパワースペクトル (左) とノイズ寄与率 (右) (二つの曲線をはさんで、上：通貨量、中：物価、下：在庫のノイズ源から各変量へのノイズ寄与率を示す)。

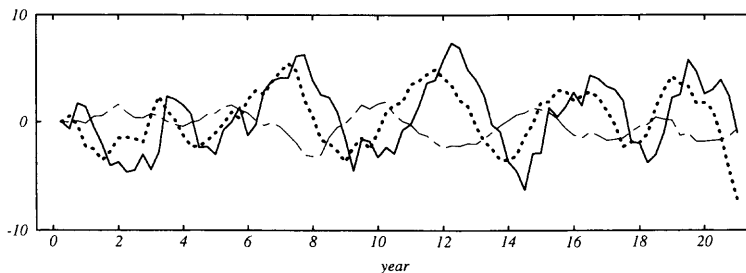


図6. フィードバック関係が成り立った場合の各循環変動成分のシミュレーション値。実線：在庫指数、破線：物価指数、点線： M_2+CD 、以下同様。

この状況下で様々なマスキング操作をおこなってみた。

1. 通貨量と他の二変量とのフィードバック関係を切断した場合(図7上段)：それぞれの変量のシミュレーション値(図7中段)を示す。また、物価から在庫へのオープンループインパルス応答(図7下段左)、在庫から物価のオープンループインパルス応答(図7下段右)を示す。これらの図において、縦軸は、インパルス応答の値が各変数の測定単位に依存しない値を示す。横軸は年を表す。以下同様である。これによると、通貨量から物価や在庫に対する大きな影響がないことを示している。その一方で通貨は他と相互関係がなくなると変動のパワーが小さくなる。物価が上がると在庫は増え、在庫が増えると物価が下がるという関係が見られる。
2. 通貨量から他の二変量へ、在庫から物価への経路を切断した場合(図8上段)：シミュレーション値(図8下段)は、物価と在庫は負の方へ発散し通貨量は正の方へ増加していく。
3. 通貨量から他の二変量へ、物価から在庫への経路を切断した場合(図9上段)：シミュレーション値(図9下段)では、在庫は変動のパワーが下がり、物価は負へ発散する。

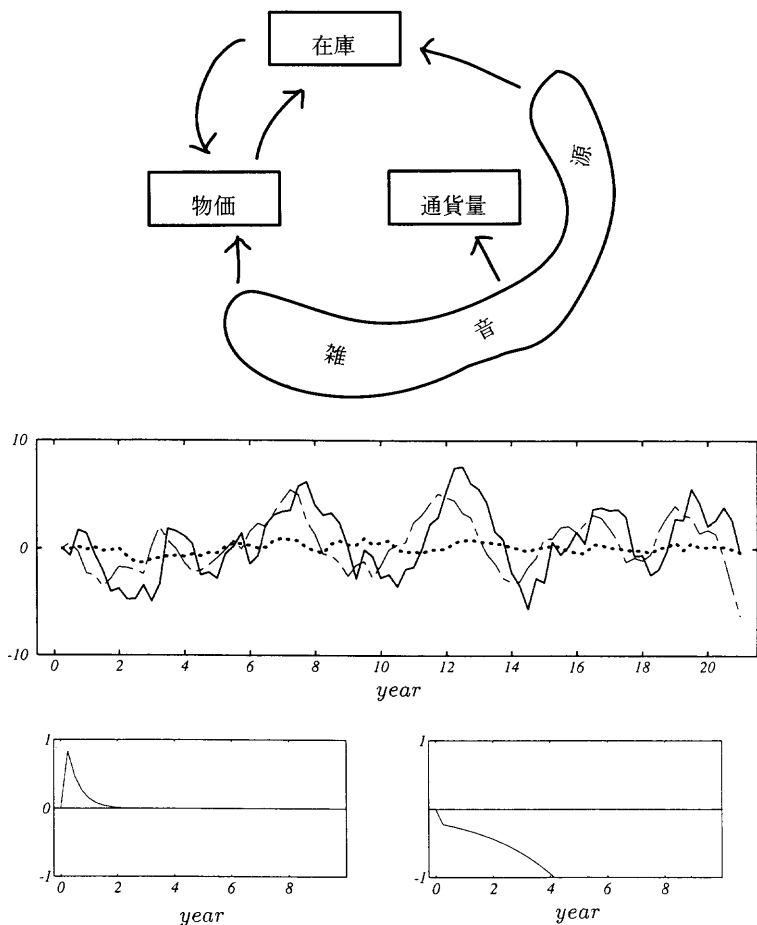


図7. 条件1.

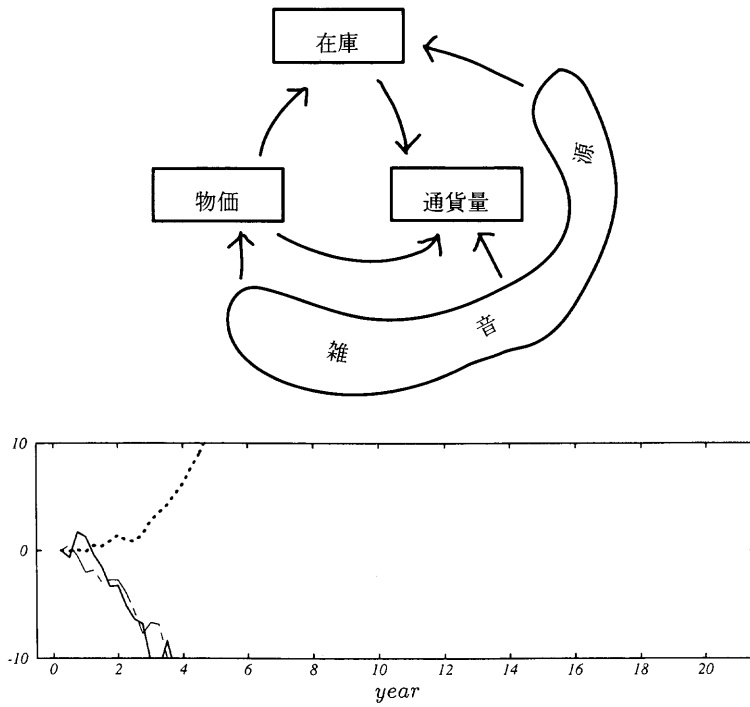


図8. 条件2.

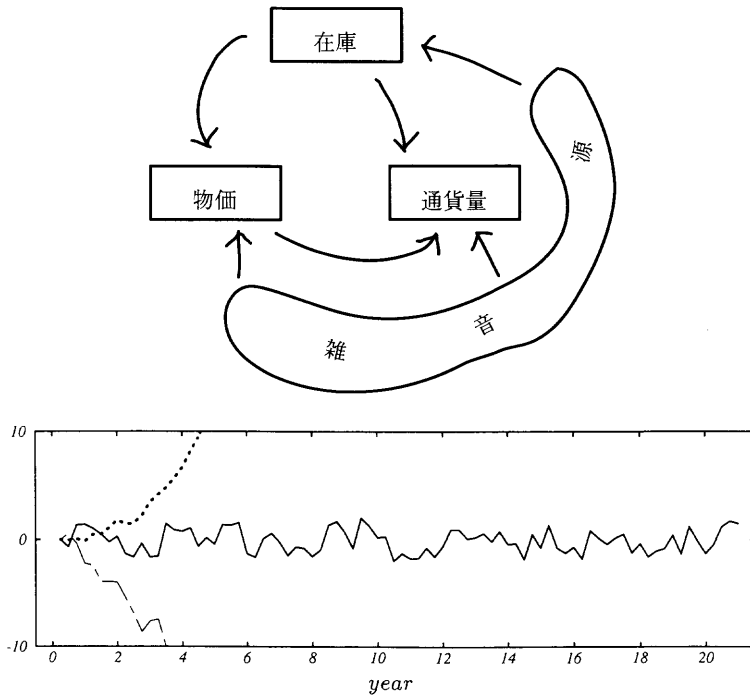


図9. 条件3.

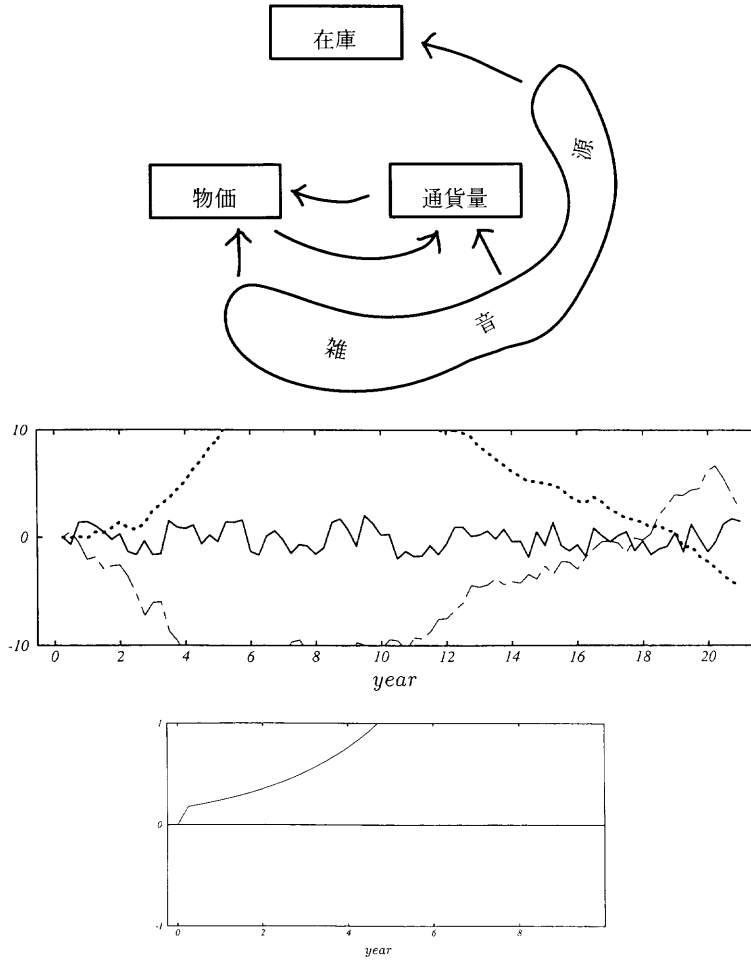


図10. 条件4.

これは、物価から在庫へのフィードバックがかかることで物価の変動が制御されていることを示している。また、この場合通貨量も正の方へ発散する。

4. 在庫と他の二変量との関係を切断した場合(図10上段)：シミュレーション値(図10中段)からは、物価と通貨の関係を安定化させようとフィードバックが働く傾向がみられる。また、通貨から物価へのオープンループインパルス応答(図10下段)からは、通貨量の増大が物価を上昇させる様子が見られる。
5. 物価と他の二変量との関係を切断した場合(図11上段)：シミュレーション(図11中段)からは、在庫と通貨量の変動のパワーが下がっているのがわかる。通貨から在庫(図11下段左)、在庫から通貨(図11下段右)オープンループインパルス応答関数から、在庫と通貨の関係は殆んどみられない。これは、在庫から通貨、通貨から在庫を切断した場合でもその形状は変わらない。

上記の2と3の結果からは、石黒・加藤(1995)で議論していた在庫と物価の関係によるフィードバックがシステムを安定化させ、在庫が物価の変動を制御していることを示すことができた。

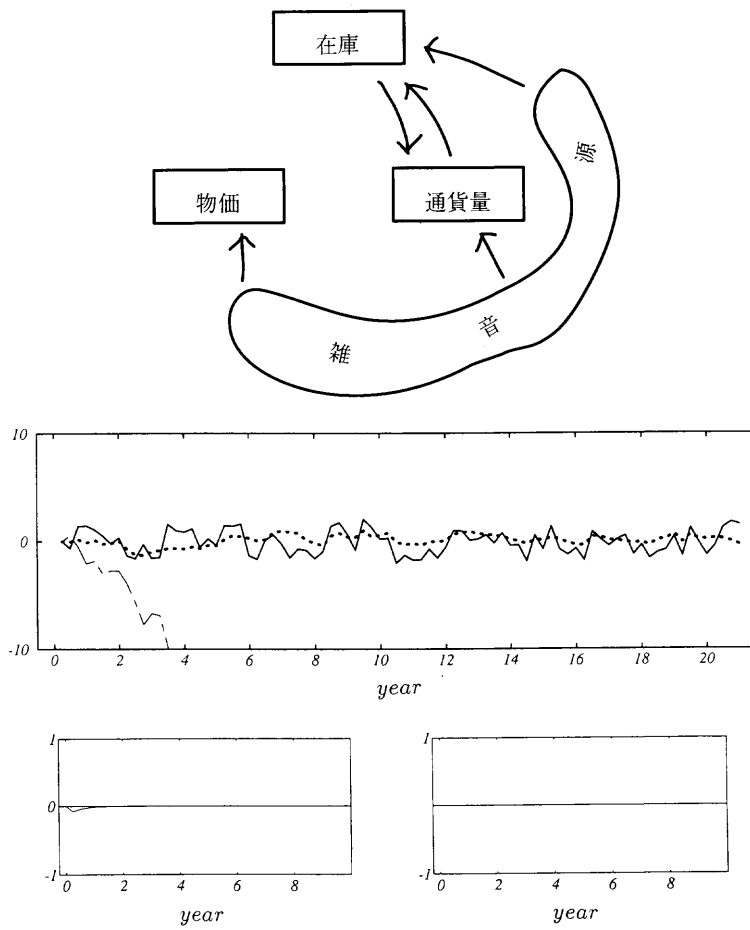


図11. 条件5.

また3変量の関係について、

$$\text{在庫} \leftrightarrow \text{物価} \leftrightarrow \text{通貨}$$

という図式が成り立ちそうである。↔は相互関係が成立しそうであるという意味である。4, 5の結果から、在庫から通貨量の関係が物価から通貨量に比べてはるかに小さいことを示していた。

また、

- ・在庫増加が物価下落を招く
- ・物価上昇が在庫増加を招く
- ・通貨量増大が物価上昇を招く

という一般的な経済理論に対応する関係も推定された。

6. おわりに

MARTS モデルと ARdock による統計的システム解析により、在庫・物価・通貨量からなる経済システムの動的変化を追ってみた。経済システムがたったの3変量の関係から理解できるとは、全く考えていないが、少なくともこれらのデータからは、インフレーション、デフレーションに関する経済理論を裏付ける情報や在庫・物価・通貨量のフィードバック関係に関する情報を取り出すことができたといえる。その点から考えるとこれらの手法は、機械的に季節調整を施したり、事前に対前年同期比を適用することなく、また経済理論の事前情報がモデルに加わっているわけでもなく、データの語ることを素直に表すことができることが利点であるといえよう。

もっぱら原系列中心の解析なので、多変量データの組合わせや、解析する期間の選択など考慮せねばならない問題はまだまだ多いと思われる。そこで、

- ・今回の解析では、データのスパンを限定した。本稿で取り上げたデータとは異なった構造をもつとみたスパンにおいても3変量の関係を調べてみることによって長期にわたる経済システムの時間的変化を明らかにできるかもしれない。
- ・物価の変動を左右しそうな要因として、金利と為替レートを加え相互の関係を調べてみる。
- ・在庫指数と物価指数では、取り扱う製品群に違いがあるため、製品や原材料の区別を考慮してみたらどうか。

という問題を今後の研究テーマとして取り上げている。

本稿は、これらのデータ解析とその結果がどこかで経済の専門家に触れることを期待しつつまとめたものであることを最後に付け加えておく。

謝 辞

この研究は統計数理共同研究(8-A-29)として行われたものである。データの入手にあたり、千葉経済大学の藤原俊朗、統計数理研究所の川崎能典、佐藤整尚の各先生方に御協力を頂いた。また、第14回応用経済時系列研究会(明治学院大学)において本稿の一部を発表した際、ご清聴頂いた諸先生方に有用なコメントを頂いた。さらにレフェリーの指摘をいただいて不備な点の改善が出来た。この場を借りてお礼を申し上げたい。

参 考 文 献

- Akaike, H. (1980). Likelihood and the Bayes procedure, *Bayesian Statistics* (eds. J. M. Bernardo, M. H. De Groot, D. U. Lindley and A. F. M. Smith), 143-166, University Press, Valencia.
- 赤池弘次, 中川東一郎 (1972). 『統計的解析と制御』, サイエンス社, 東京.
- 石黒真木夫 (1989). 多次元 AR モデルによるシステム解析, オペレーションズリサーチ, **34**(10), 547-554.
- Ishiguro, M. (1994). System analysis and seasonal adjustment through model fitting, *Proc. The First US/ Japan Conference on the Frontiers of Statistical Modeling: An Informational Approach* (ed. H. Bozdogan), 79-91, Kluwer, Dordrecht.
- Ishiguro, M. and Akaike, H. (1985). BAYSEA, a BAYsian SEasonal Adjustment Procedure, TIMSAC-84, *Comput. Sci. Monographs*, No. 22, 1-55, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- Ishiguro, M. and Akaike, H. (1989). DALL: Davidon's algorithm for log likelihood maximization—a fortran subroutine for statistical model builders—, *Comput. Sci. Monographs*, No. 25, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- 石黒真木夫, 加藤比呂子 (1995). 経済システム解析, 数理科学, **339**, 50-57.

- 石黒真木夫, 大矢多喜雄 (1995). ARdock による「人-二輪車システム」の解析, 『時系列解析の実際II』 (赤池弘次・北川源四郎 編), 19-39, 浅倉書店, 東京.
- Kato, H. (1995). A study of multivariate mean-nonstationary time series model for estimating mutual relationships, Ph. D. Dissertation, The Graduate University for Advanced Studies.
- Kato, H., Naniwa, S. and Ishiguro, M. (1996). A Bayesian multivariate nonstationary time series model for estimating mutual relationships among variables, *J. Econometrics*, **75**, 147-161.
- Kitagawa, G. (1981). A nonstationary time series model and its fitting by a recursive filter, *J. Time Ser. Anal.*, **2**, 103-116.

Dynamical Analysis for Economic System by Multivariate Time Series Model

Hiroko Kato

(Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Hiroshima University)

Makio Ishiguro

(The Institute of Statistical Mathematics)

An economic system constructed from the index of industrial inventory (“inventory”), the index of whole sale price (“price”) and M_2+CD (“money”) in Japan is analyzed using the MARTS (Multivariate AR with Trend and Seasonal components) model and statistical system analysis tool “ARDock”. The MARTS model is fitted to the given three dimensional time series data and the AR part parameters are analyzed with “ARDock” to study the dynamic interaction among variables. We assume several kinds of situation in which the feedback relationships among three variables are cut and observe impulse responses and execute simulation study in each situation. This sequence of procedure is successful in extracting dynamical structure of the system which is harmonic with macro economic theories, such as theories related to inflation and deflation. Also, the results indicates that “inventory” is acting as a negative feedback controller of the fluctuation of “price” and that there might be a little control of “price” index via “money”.