

# 季節調整の「最適性」について

統計数理研究所 川崎 能典・佐藤 整尚

(1997年7月 受付)

## 1. はじめに

経済時系列の統計的解析において季節性のモデリングは重要な一分野であるが、季節性を含めた幾つかの成分への分解を前提にした手法を特に季節調整法と呼ぶ。こうした分解への需要は、例えば景気動向などの中長期的趨勢の判断にあたって季節変動を取り除きたいというような現実的要請から来るものである。いくつかの季節調整法を比較して、どれが最良な方法かを判定する明確な規準というものは一般には存在しない。それは、季節調整を必要としている者がどのような意思決定問題の中において、どのような損失関数を抱えて、どの程度の精度で季調を実現したいと考えているかなどに依存するからである。季調系列を所与のものとして受け取る分析者は、その意味で特定の季節調整法が内在する規準—それが明示的であれ暗黙のものであれ—を込みにし受け容れていることに等しい。季節調整法を明示的な統計モデルに基づく方法と手続き型の二種類に大別すると、前者においては何らかの意味での良さを表す統計的規準を定め、それを最良の形で満たす季節調整法を構成するのが普通である。仮定した時系列モデルの一期先予測の良さを分布で評価するというのが最も一般的な意思決定ルールであろうが、それに包含される特殊ケースとして、最小平均二乗誤差(以下最小 MSE と記す)という規準が得られる。

一方で、モデリングやモデル選択に基づくアプローチが一般的になる以前に、季調後の系列の満たすべき望ましい条件が、主にその周波数特性に関して提唱されたことがかつてあった。そのひとつに、季調済み系列のパワースペクトルは季節周波数においてピークがあってもいけないし溝(dip)があってもいけない、という主張があり、もし季節周波数で溝があれば、それは過剰調整(over adjustment)の証拠であるという問題提起がなされた。しかし、季調済み系列のパワースペクトルにいわゆる seasonal dip が生ずることは、最小 MSE 規準と実は表裏一体である(Grether and Nerlove (1970))。この古い問題を今日的な視点を交えて振り返ることが本稿の目的の一つであるが、米国センサス局が従来の X-11 法の改良版として提供している X-12-ARIMA 法(Findley et al. (1996))の評価をめぐって、近年本邦でも季節調整法に対し広く関心が集まっているように思われる。この際、季節調整の「最適性」をめぐる過去の議論を再訪しておくのは、時宜にかなったことと思われる。

本稿の構成は以下の通りである。まず 2 節では、Nerlove (1964) において提案された季節調整の「最適性」に関する規準が、Grether and Nerlove (1970) で否定されるに至った議論の経緯を振り返り、最小 MSE 規準を満たす時不変線形フィルタの特徴付けを行う。3 節では、実際のデータ解析で seasonal dip が見えたり見えなかったりする現象を不規則変動の役割に注目して整理する。そこまでの議論の確認として、幾つかの重要な数値例に対してモデル型季節調整の代表格である DECOMP と移動平均型季節調整の代表である X-12-ARIMA を適用し、両

者を利用する際の実践的な注意などを述べる。補足的な論点について触れた後に、4節には本稿のまとめを記す。

## 2. 最小 MSE 規準と seasonal dip

### 2.1 季節調整と予測性

最小 MSE 自体は予測の良さという規準を何ら含んでいないように見えるが、モデルを線形ガウスのクラスに制限すれば、最尤法と同じと考えてよい。一期先の予測の良さというのは時系列モデルの尤度に与える解釈として極めて自然なものであるが、この予測の良さという性質は、モデルに基づく季節調整であっても手続き型の季節調整であっても、意味合いがやや異なりこそすれ重要である。前者においては、最尤推定された複数のモデル候補から母数過剰なものを除外する規準として予測性が使われる。換言すれば、インサンプルでの過剰適合のあまり、同じ（真のしかし未知の）確率構造から生じるデータに対する適合を著しく欠くようなモデルを、情報量規準や統計的仮説検定で排除するということである。ここで注意を促しておきたいのは、現在あるいは過去の観測値に含まれる見えない信号（＝季節成分）の推定に関心があるという意味で季節調整においては予測が第一の目的でないにも関わらず、予測性という概念を通じてインサンプルでの推定のよさが（最大エントロピーの意味で）確保されることである。

データに移動平均を施して季節調整を行う方法では、別の意味で予測性のよいモデルが重要である。というのは、両側移動平均を行うとデータの両端に欠落値が生じるため、適当なモデルをあてはめてそれを前後に外挿して平滑化を行うのが一般的だからである。特にデータの末端付近は情勢判断等の見地から重要であり、この末端付近の季節調整値の信頼性は予測に信頼の置けるモデルをどれだけ根気よく探索できるかにかかっている。Findley et al. (1996) の X-12-ARIMA は、予測性のあるモデルを構築するためのオプションの充実化で季節調整値の頑健化を図ったものと評価できる。（このような頑健さに対する取り組みは、結果的には全く違う方向性の手法で実現されたとはいうものの、おそらく Kitagawa (1989) のロバストアプローチに触発されたものであろう。）X-12-ARIMA 法では、肝心の季節調整を行う部分ではモデルは明示的には登場せず再び手続きのみが存在するが、今後は移動平均型季節調整法においてもモデリング指向は一層強まっていくことが予想される。

### 2.2 Nerlove のスペクトル規準

冒頭に述べたように、季節調整とは観測された時系列を観測されない幾つかの成分に分解することである。BAYSEA (Akaike and Ishiguro (1980)) や DECOMP (Kitagawa (1981)) といった季節調整法はこの認識のモデル化であり、一方 X-11 型の手続きだけで定義された季節調整法も暗黙裏に統計的モデルを想定していると思わせる。（例えば Wallis (1974), Cleveland and Tiao (1976), Ozaki and Thomson (1994) など。）非線形フィルタの利用などを考えなければ、おおまかにいって季節調整法の多くは加法型か対数加法型の線形モデルに依拠している。要素の一つ一つは明確に性質の異なる因子であって、観測時系列はそれらの和で表されるという定式化は、Grether and Nerlove (1970) の議論に依れば季節調整の文脈では少なくとも今世紀初頭以来定着してきたものと思われる。経済学的興味からすれば、季節変動を何らかの因果的（と思われる）変数で説明したいという欲求は自然であろうが、現実のデータの精度を考えると demanding に過ぎるというものであろう。こうした経緯から、季節調整＝年周期の抽出というやや操作的なところに議論は集中する。

季節調整において推定の良さや予測力の有無が議論されるためには、作業仮説としての統計的モデルが明確であることがその前提であるが、季節調整問題においては初めからそのような

モデルベースの議論がなされてきたわけではない。季節調整の文脈で予測性という概念が導入されたのは1970年代に入ってからのものであり、最初は季調済み系列に関して考えられる望ましい条件を片っ端から提案してその有効性を確認してゆくということから始まったようである。そうした文脈で季節調整法の良さに関する議論に重要な一石を投じたもののひとつに Nerlove (1964) がある。Nerlove が提案した季節調整系列のスペクトルが満たすべき規準のうち、本稿で議論の対象とするのは以下の二点である。

1. 季調系列のスペクトルにおいては、季節周波数とその高調波 (harmonics) でピークがあってはならない。
2. 季調系列のスペクトルにおいては、季節周波数とその高調波で溝 (dip) があってはならない。

季節周波数とは、例えば月次データなら周波数  $1/12 \times 2\pi = \pi/6$  のことで、 $k/12 \times 2\pi$  ( $k=2, \dots, 6$ ) がその高調波である。低周波から順に1年周期から2ヶ月周期までが対応し、2ヶ月より短い波は  $\pi$  (ナイキスト周波数) 以下に折り返される。本稿では以下、季節周波数に高調波も含めた総称として単に季節周波数と呼ぶことにする。さて、上の二つの規準は殆ど同内容であるが、実証分析上問題視されてきたのは後者の方で、この種のスペクトルの溝は seasonal dip と呼ばれて過剰調整という問題と背中合わせに議論されてきた。前者がいわば季節調整の目的で、後者はそれが妥当であることの規準というわけである。この一見 a priori に認めてもよさそうな尤もらしい規準が、もうひとつの尤もらしい規準である最小 MSE と両立しないことを後に Nerlove 自身が示すことになる。季調済み系列のスペクトル特性に関して Nerlove (1964) が提案した幾つかの規準は、現在では殆ど意味を持たないというのが定説のようであるが (Hylleberg (1986), 第3章), Nerlove の議論を契機に数多くの議論が喚起された部分は評価されるべきであろう。

2.4 節以降で具体的に最小 MSE フィルタの性質を述べてゆくが、その前に本稿での用語について若干の但し書きをしておきたい。本稿ではフィルタという言葉がしばしば登場するが、推論の形式を指して言う場合と、推論を与える重み関数を指して言う場合とがあるので注意が必要である。状態空間モデルの用語としては、現時点での情報も含めて過去の全ての情報を用いて現在の状態ベクトルの分布を推定することをフィルタ (濾波) という。その意味では、後述の信号抽出もフィルタの一形式と言える。また、移動平均フィルタのような時不変線形フィルタ、つまり重み関数を指して単にフィルタということもある。本稿では、重み関数を与える有理関数を同一視してフィルタと呼ぶこともあるが、混乱は生じないであろう。

### 2.3 信号抽出

ここでは次小節の準備として、信号抽出 (signal extraction) 問題の古典的解法について説明する。内容は Whittle (1963) にほぼ全面的に負う。我々は定常過程  $\{x_t\}$  を観測できるが、この観測値は本来我々が関心を持つ信号  $y_t$  がノイズ  $\delta_t$  で汚染された後に観測されるものと想定する。すなわち  $x_t = y_t + \delta_t$  である。添え字  $t$  が時間を表すものとして、ここでは  $x_t$  の過去の値だけでなく現在及び未来の値も使って  $y_t$  を最小二乗推定することを考える。つまり

$$\hat{y}_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_s x_{t-s}$$

$$\gamma(z) = \sum \gamma_s z^s$$

なる両側対称無限フィルタ  $\gamma_s$  を最小二乗推定するのがここでの目的である。議論の単純化のため連続なスペクトル密度が存在する場合だけを考えると、最小二乗推定量の性質から

$$\begin{aligned}
0 &= \text{cov}(y - \hat{y}, x_{t-j}) \\
&= \text{cov}(y, x_{t-j}) - \sum \gamma_k \Gamma_{j-k} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda} [f_{yx}(\lambda) - \gamma(e^{-i\lambda}) f_{xx}(\lambda)] d\lambda \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \dots)
\end{aligned}$$

を得る。ただしここで  $\Gamma_{j-k}$  は  $x_t$  の自己共分散を表し、 $f_{xx}$  および  $f_{yx}$  はスペクトル密度関数ならびに相互スペクトル密度関数である。これが全ての  $j$  について成り立つためには

$$r(e^{-i\lambda}) = \frac{f_{yx}(\lambda)}{f_{xx}(\lambda)}$$

が殆ど全ての  $\lambda$  について成り立つことが必要である。従って、 $f_{xx}(\lambda)$  等で  $e^{-i\lambda} = z$  と置き直して、共分散母関数の観点から上の式を書き直すと

$$(2.1) \quad \gamma(z) = \frac{g_{yx}(z)}{g_{xx}(z)}$$

となる。アルゴリズムを捨象して形式的な話をすれば、この多項式の割り算から我々の求める両側フィルタは与えられる。逆に  $g_{xx}(z)$  において  $z = e^{-i\lambda}$  とおくと、Wiener-Khinchin の公式から直ちに  $x_t$  のスペクトル密度が得られる。従って共分散母関数はスペクトルと殆ど同一視してよいが、本稿においては共分散母関数に対して一貫して  $g_{xx}(z)$  等で記し、 $z = e^{-i\lambda}$  とおいて得られる  $\lambda$  の関数を  $f_{xx}(\lambda)$  等と書く。

信号抽出とは、本小節冒頭に述べたようなより一般的な意味での問題を指す言葉であるが、季節調整の文脈では、あてはめた ARIMA モデルを元に (2.1) 式に与えられるフィルタでトレンドや季節成分を抽出する方法 (Unobserved Components ARIMA; UCARIMA) を指して信号抽出と呼ぶのが慣例になっているようである。半無限の片側フィルタや非対称フィルタも、この方式を拡張して導くことができるが、実装上どれが望ましいかはまた別の視点が必要であり、かつソフトウェア制作のレベルの議論となるので本稿ではこれ以上踏み込まない。少なくとも Burman (1980) は、前後にかなりの数に及ぶ外挿をした上で、項数の大きな両側移動平均を実行しているようである。

#### 2.4 Seasonal dip が生じる理由

2.1~2.3 の内容を承けて本小節では、線形モデル型季節調整法において必然的に seasonal dip が生ずることを観察する。Grether and Nerlove (1970) がシミュレーションで用意したデータ生成過程は以下のようなものであった。

$$(2.2) \quad X_t = T_t + S_t + I_t$$

$$(2.3) \quad T_t = \frac{\epsilon_t + 0.8\epsilon_{t-1}}{(1-0.95L)(1-0.75L)}$$

$$(2.4) \quad S_t = \frac{\nu_t + 0.6\nu_{t-1}}{1-0.9L^{12}}$$

$$(2.5) \quad I_t = \eta_t,$$

ここで  $\{\epsilon_t\}$ ,  $\{\nu_t\}$ ,  $\{\eta_t\}$  は互いに無相関な白色雑音系列である。 $T_t$ ,  $S_t$ ,  $I_t$  はそれぞれ、トレンドサイクル成分、季節成分、不規則成分などと呼ばれることが一般的である。トレンドサイクルと呼ぶのは、定常 AR 過程などで明示的にサイクル成分のモデリングをした場合との区別とい

う意味では正確なのだが、本稿の議論ではサイクル成分のモデリングは登場しないので、単純化のため以降トレンド成分と言えどトレンドサイクル成分を指すものとする。また、季節調整の枠内で言及される不規則成分のことを時々観測ノイズとして言及することがある。これは、状態空間モデルを用いて季節調整モデルを構成したときに、不規則成分が形式上観測ノイズの位置を占めるからである。これも大きな混乱は招かないと判断し、本稿の中では適宜この二つの用語を併用していく。

ここでは例としてトレンド成分  $T_t$  を  $X_t$  から抽出する場合を取り上げよう。(他の要素であっても、議論は完全に並行である。)UCARIMA による季節調整法では、まず  $\{X_t\}$  に ARIMA モデルをあてはめる。そこから導かれる MA 表現が、(2.1) 式の分母に相当する共分散母関数を直ちに与える。一方、各観測不能要素を駆動するイノベーション過程  $\{\epsilon_t\}$ ,  $\{\nu_t\}$ ,  $\{\eta_t\}$  は互いに無相関な白色雑音系列であった。この仮定から、共分散母関数  $g_{XT}$  等は各成分の自己共分散母関数  $g_{TT}$  等に帰着し、それゆえ  $X_t$  の自己共分散母関数は各要素の自己共分散母関数の和として得られる。

$$g_{XX}(z) = g_{TT}(z) + g_{SS}(z) + g_{II}(z)$$

例に則して具体的に  $g_{XX}$  を書き下した式は、ここでは本質的ではないので Grether and Nerlove (1970) を参照されたい。各要素のイノベーション過程の分散の大きさを何らかの形で定めることができれば、(2.1) 式より  $\gamma(z) = g_{XT}(z)/g_{XX}(z) = g_{TT}(z)/g_{XX}(z)$  が最小 MSE の意味での最適信号抽出フィルタ (対称な重み関数) を与える。全く同様の議論に従って、任意のステップの予測フィルタも構成することができる。

さて、今取り上げているケースでは、我々はデータ生成構造に関して完全な知識がある。従って、そこから発生させたデータに対して最小 MSE の意味で「最適な」季節調整法フィルタを標本誤差の問題なしに構成できる。Grether and Nerlove (1970) の注目すべき結果は、それでも季調後の系列のスペクトル密度に seasonal dip が見られるということである。これは次のように理解することができる。まず信号抽出フィルタ  $\gamma(z)$  を用いて、トレンド成分のスペクトル密度は  $f_{\hat{T}\hat{T}}(\lambda) = \gamma(e^{i\lambda})\gamma(e^{-i\lambda})f_{XX}(\lambda)$  より

$$(2.6) \quad f_{\hat{T}\hat{T}}(\lambda) = \left\{ \frac{f_{TT}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda)} \right\}^2 f_{XX}(\lambda)$$

あるいは

$$(2.7) \quad f_{\hat{T}\hat{T}}(\lambda) = \frac{f_{TT}(\lambda)}{1 + \frac{f_{SS}(\lambda)}{f_{TT}(\lambda)} + \frac{f_{II}(\lambda)}{f_{TT}(\lambda)}}$$

と表される。経済時系列の典型的なパワースペクトルの形を考えれば、(2.7) 式の分母第 2 項の比  $f_{SS}(\lambda)/f_{TT}(\lambda)$  は、季節周波数近辺では一般に大きな値になると考えられる。従って Grether と Nerlove の言葉を借りれば、季節周波数で季調済み系列のスペクトル密度が持つ「溝は、Nerlove (1964) が考えたような過剰調整を表しているのではなく、むしろこの種の『最適』季節調整の特徴付けになっている」のである。

同じ事柄を別な角度から眺めることになるが、Sims (1978) の議論もわかりやすい。いま (2.2) において、季節成分と非季節成分しか考えない、すなわち  $I_t$  と  $T_t$  を特に分離しないケースで考えよう。 $T_t + I_t = Y_t$  として (2.6) で両辺対数を取ることで

$$(2.8) \quad \log f_{\hat{Y}\hat{Y}}(\lambda) = 2 \log f_{Y\hat{Y}}(\lambda) - \log f_{XX}(\lambda)$$

を得る。季節周波数近傍で (2.8) 式の意味を考えよう。通常トレンド成分には、ゼロ周波数の近傍でピークを持ち高周波になるに従ってパワーの減衰するスペクトルをもつ滑らかなモデルを、観測ノイズには周波数領域で一様分布するスペクトルを想定するのが一般的であり、いずれにせよ  $f_{YY}(\lambda)$  は滑らかな関数である。このように、 $f_{YY}$  が季節周波数でピークも溝も持たないのであるから、原系列が持つスペクトルのピークと深さ・形が全く同じ seasonal dip が、季調済み系列のスペクトル密度に生じる。逆に言えば、非季節成分として想定したモデルに季節周波数である程度のピークを持たせれば、 $f_{\hat{Y}\hat{Y}}$  から seasonal dip を取り除くことは理論的に可能であろうが、そうしたモデリングを支持する理由は全くもって自明でないように思われる。

図1は、非季節成分と季節成分の分散比が等しい場合をとって、後述の (3.1)~(3.4) 式で表される季節調整モデルに基づき、2.3 に記した Wiener-Kolmogorov 型フィルタから導かれるスペクトルを描いたものである。(一般性を失うことなく、この図では観測ノイズの分散をゼロとしている。) 図1(a)が原系列、図1(b)が最適フィルタによる季調系列のスペクトルであるが、ピークと溝の対応は鏡で折り返したかのようなのである。なお、標準的な季節調整モデルでは後出 (3.3) のように季節周波数においてスペクトルが発散するタイプの制約を置くが、一方 (2.8) を見ると、真の季節成分のスペクトルが持つピークが仮に有限であっても、季調済み系列には理論的に seasonal dip が存在する。換言すれば、季節モデルの特性多項式の根が定常根であっても、ピークの折り返しとしての dip は必ず存在する。従って、モデル型季節調整において、季節モデルの特性多項式に定常根を導入すれば dip を除去できると考えるのは誤りである。ピークに関して更の一つ注意を促せば、仮に真のモデルにおいて季節周波数でスペクトルが発散していたとしても、実際にはスペクトルでのピークの高さは理論的にそうあるべき水準よりも低く推定されるということである。これは以下のように確かめられる (Burman (1980)). ノイズの独立性の仮定から  $T_t + I_t = Y_t$  に関して、 $f_{XX}(\lambda) = f_{YY}(\lambda) + f_{SS}(\lambda)$  となることに注意すれば、推定された季節成分のスペクトルは

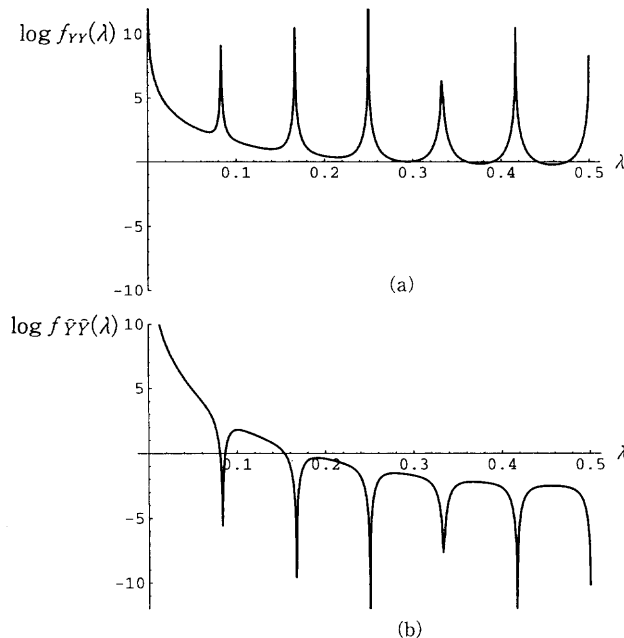


図1. スペクトルの理論値。(a)原系列、(b)「最適な」季調系列。

$$f_{SS}(\lambda) = \left\{ \frac{f_{SS}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda)} \right\}^2 f_{XX}(\lambda) = \frac{\{f_{SS}(\lambda)\}^2}{\{f_{SS}(\lambda) + f_{YY}(\lambda)\}^2} f_{XX}(\lambda)$$

となり、同様に季調済み系列のスペクトルの推定値は

$$f_{YY}(\lambda) = \frac{\{f_{YY}(\lambda)\}^2}{\{f_{SS}(\lambda) + f_{YY}(\lambda)\}^2} f_{XX}(\lambda)$$

によって与えられる。明らかに  $f_{SS}(\lambda) + f_{YY}(\lambda) < f_{XX}(\lambda)$  となっている。まとめて言えば、実際にモデルが表現すべきピークが発散型に見えない場合であっても非定常モデルは場合によっては十分妥当性を持つし、季節モデルが非定常モデルである（特性多項式が単位根を持つ）ということが seasonal dip の原因なのではない。

ここまでの議論を整理すると、最小 MSE という規準を放棄しない限り seasonal dip は不可避的に存在する。しかし一方で、ごく限られたデータ解析例を頼りに、特定の手法について seasonal dip が見られる見られないといった主張をなす報告は絶えず、しかもその結果はまちまちである。本節では seasonal dip が存在する理由についてこれまでの研究を振り返りながら解説してきたが、次節では実際のデータ解析で seasonal dip が出現あるいは消失する理由を考察する。

### 3. Seasonal dip とノイズレベル

#### 3.1 観測ノイズの分散の影響

この節では、信号抽出型のモデルではなくベイズ型季節調整法、とりわけ DECOMP— というより DECOMP の一例である比較的簡単なケース— に基づき、seasonal dip の現れ方に関して数値的な理解を深めてみたい。BAYSEA や DECOMP ではモデル選択は AIC に基づいて行われるが、モデルを線形ガウスに限定すれば、カルバック・ライブラー情報量最大は最小 MSE と同値である。また、各成分に対するモデルを同一にすれば、信号抽出型とベイズ型の違いは、各成分を駆動するノイズの分散をどう決めるかの違いでしかない。従って、推定後の結果の解釈という観点からは、前節までの議論はほとんど並行的に DECOMP にもあてはまると考えてよい。若干注意を要する点は、ARIMA ベースの信号抽出もベイズ型季節調整も、(2.3) (2.4) とは異なり非定常モデルを仮定するので、トレンドサイクルならびに季節成分のスペクトルは形式的なものだということである。このようにスペクトルの解釈には注意が必要だが、前節に取り上げた信号抽出の古典的解法自体は、非定常時系列のケースに拡張されている (Bell (1984))。なお DECOMP の実行にあたっては、計算プログラムは殆ど全てオリジナル版に基づいている。DECOMP のモデリングとアルゴリズムについては Kitagawa (1981) を、ソフトウェア紹介としては北川 (1986) を、最近の展開については本特集号の北川 (1997) を参照されたい。

この節では、トレンド成分と季節成分に対して、以下の極めて標準的なモデルを仮定する。

$$(3.1) \quad X_t = T_t + S_t + I_t$$

$$(3.2) \quad T_t = \frac{\epsilon_t}{(1-L)^2}$$

$$(3.3) \quad S_t = \frac{\nu_t}{1 + \dots + L^{11}}$$

$$(3.4) \quad I_t = \eta_t.$$

ここで再び  $\{\epsilon_t\}$ ,  $\{\nu_t\}$ ,  $\{\eta_t\}$  は互いに無相関な白色雑音系列であり, その分散を各々  $\tau^2, \sigma^2, \sigma^2$  とする. ではまず「最適な」季節調整系列のスペクトルが, 観測ノイズの大きさの変化とともにどう振る舞いを見せるかを調べていこう. (3.1)~(3.4) において, (2.8) に相当するもの考えると

$$(3.5) \quad \log f_{\hat{T}\hat{T}}(\lambda) = \log f_{TT}(\lambda) - \log \left\{ 1 + \frac{\tau^2}{\sigma^2} \frac{|1 + e^{-i\lambda} + \dots + e^{-i\lambda \times 11}|^{-2}}{|1 - e^{-i\lambda}|^{-4}} + \frac{\sigma^2}{\tau^2 |1 - e^{-i\lambda}|^{-2}} \right\}$$

となる. 同様に, 推定された観測ノイズのスペクトルについても (2.8) 式に相当するもの考えることができる. 実際には  $\hat{I}_t$  はトレンド成分と季節成分の推定の副産物として推定されるので, わざわざ時不変線形フィルタを構成して推定することはしないが, ここではスペクトル特性を議論するために観測ノイズに関しても並行的な観察を行う.

$$(3.6) \quad \log f_{II}(\lambda) = \log f_{II}(\lambda) - \log \left\{ 1 + \frac{1}{\sigma^2} (\tau^2 |1 - e^{-i\lambda}|^{-4} + \tau^2 |1 + e^{-i\lambda} + \dots + e^{-i\lambda \times 11}|^{-2}) \right\}$$

図2と図3は, さまざまなレベルの観測ノイズの場合に, 「最適な」季節調整の結果得られるスペクトルがどのような振る舞いを見せるかを示したものである. 全てのケースで, トレンドと季節成分のイノベーションの分散は等しく1とおいてあり, 観測ノイズの分散だけが異なる. 図2ならびに3の(a)では  $\sigma^2=1$ , (b)では  $\sigma^2=100$ , (c)では  $\sigma^2=10000$  である. 本質的には,  $\tau^2$ ,  $\sigma^2$  と  $\sigma^2$  との相対比率が重要で, 絶対スケールで100とか10000という数字に意味があるわけではないことに注意. 実際にトレンドや季節成分が安定的であれば, それらのイノベーションの分散は非常に小さくなり, 観測ノイズの分散に対して  $10^{-5}$  程度の order になってしまうことは決して珍しくない. 極端なケースとしては, 決定論的なトレンドや季節ダミー変数が適切な場合がそうであるが, これは次小節の数値例4で扱う.

さて, 図2と図3の伝えるところは明瞭であろう. 観測ノイズのレベルを  $0.45 (\approx \log(1/2\pi))$ ,  $5.06 (\approx \log(10^2/2\pi))$ ,  $9.66 (\approx \log(10^5/2\pi))$  と上げてゆくにつれて, 不規則成分のスペクトルに見られた seasonal dip は消失してゆく(図3). トレンドのスペクトルは不規則成分に変動がより吸収された分パワーを下げながら, 同様に dip は見えなくなってゆく(図2). これは(2.8)あるいは(3.5)(3.6)からも明らかである. 不規則成分の分散  $\sigma^2$  が(相対的に)大きくなると, seasonal dip を生じる項の貢献度が(相対的に)低下するのである. 季節周波数におけるだけでなく, 階差モデルによるトレンド除去の結果生じるゼロ周波数での dip も同じ仕組みに従っていることが図3に明瞭に示されている. 図3(a)のゼロ周波数におけるくぼみは, (3.6)式における  $\tau^2/(\sigma^2|1 - e^{-i\lambda}|^4)$  の影響であるが, 観測ノイズの分散が相対的に大きくなるにつれて, この dip も本当は存在しながらも我々の目には見えなくなってゆく.

以上の考察から, seasonal dip が顕在化しない場合を指標的にまとめておくと, おおむね次のようなことになろう.

- 推定された不規則成分のスペクトルは,  $\sigma^2$  が大きくなるに従って(3.6)式右辺第2項の log の引数が1に近づくため, dip は見えなくなる. (解消するのではないことに注意.)
- 推定されたトレンド成分のスペクトルにおいても,  $\sigma^2$  が大きくなるにつれて(3.5)式右辺第2項の log の引数内で観測ノイズの分散が他の項を dominate してしまい, 結果としては各  $\lambda$  においてあまり違いのない大きな定数が  $f_{TT}(\lambda)$  から引かれる. この際  $f_{\hat{T}\hat{T}}(\lambda)$  は真のスペクトルに較べて, 原点近傍以外では大きくパワーロスを伴う一方で seasonal dip は顕



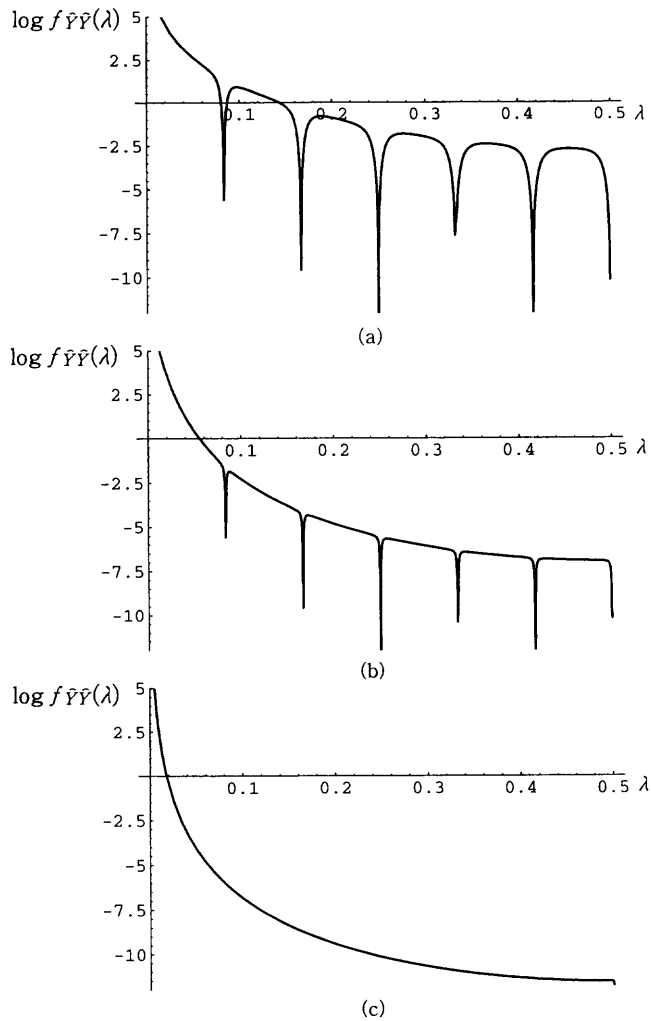


図2. トренд成分のスペクトル (理論値). (a)  $\sigma^2=1$  の場合, (b)  $\sigma^2=10^2$  の場合, (c)  $\sigma^2=10^5$  の場合.

在化しない.

- 推定されたトレンド成分のスペクトルに関しては、季節成分のイノベーション分散( $\sigma_{\epsilon}^2$ )がトレンド成分のそれ( $\sigma_{\beta}^2$ )に較べて極端に小さいケースでも seasonal dipが見えなくなると予想される。これは推定されたトレンドが極端にノイズ過多なケースに相当するが、高次の階差モデルがトレンド成分に仮定されれば起こりにくく、1次のトレンドモデルをあてはめた結果、局所的な直線あてはめの繰り返しがノイズ過多なトレンド推計値を生む場合などに限られると思われる。

このように、我々が seasonal dip を観測できなくなるときは、おおむね不規則成分の分散( $\sigma^2$ )が大きい場合であると言える。逆に言えば、ある程度の大きさの観測ノイズを保証する仕組みを—アドホックではあるが—用意しておけば、結果として seasonal dip を分析者の目にとまらぬようにすることは可能である。これは滑らかな季節調整よりは、ノイズ過多な季節調整を指

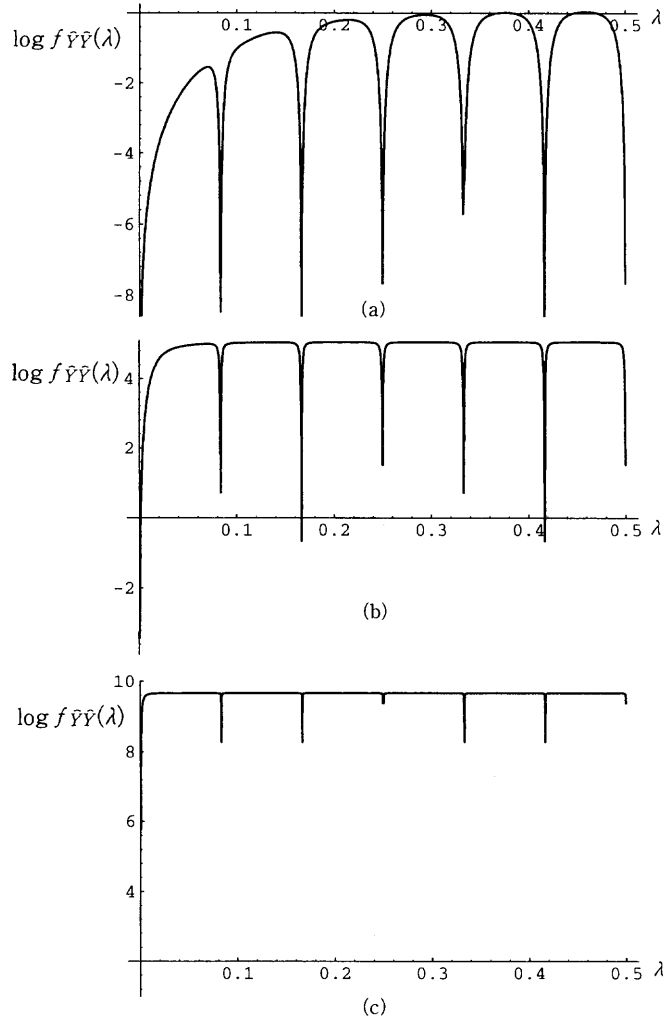


図3. 不規則成分のスペクトル (理論値). (a)  $\sigma^2=1$  の場合, (b)  $\sigma^2=10^2$  の場合, (c)  $\sigma^2=10^5$  の場合.

向することに等しい。

### 3.2 数 値 例

これまでのところは、モデルベースでの季節調整法の性質を調べてきたわけであるが、一方で実務的に広く使われているのは、米国センサス局が長年にわたって開発・改良してきた移動平均型の季節調整法であることは疑いの余地がないであろう。本小節では、様々なノイズレベルで発生させた人工的なデータに対して、X-12-ARIMA と DECOMP の結果を比較する。数値実験としては大規模・広範なものではないが、これまで議論してきたノイズレベルとの関連で、両者の「癖」が窺えて興味深い。

まず実験データの発生法を述べると以下の通りである。全ての実験で標本数は 150 に統一し、観測値は本質的に (3.1)~(3.4) が捉えうる範囲内にある構造で生成されると仮定する。そこで今回のトレンド成分は

$$T_t = 6 + \frac{8}{150}t$$

という線形トレンドから、季節成分は実際のデータから

$$S_t = K(4CP_t - CP_t^{SA})$$

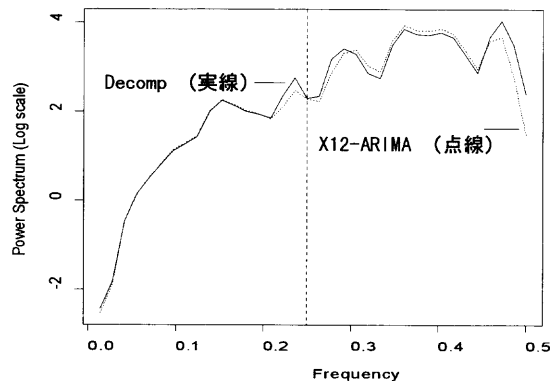
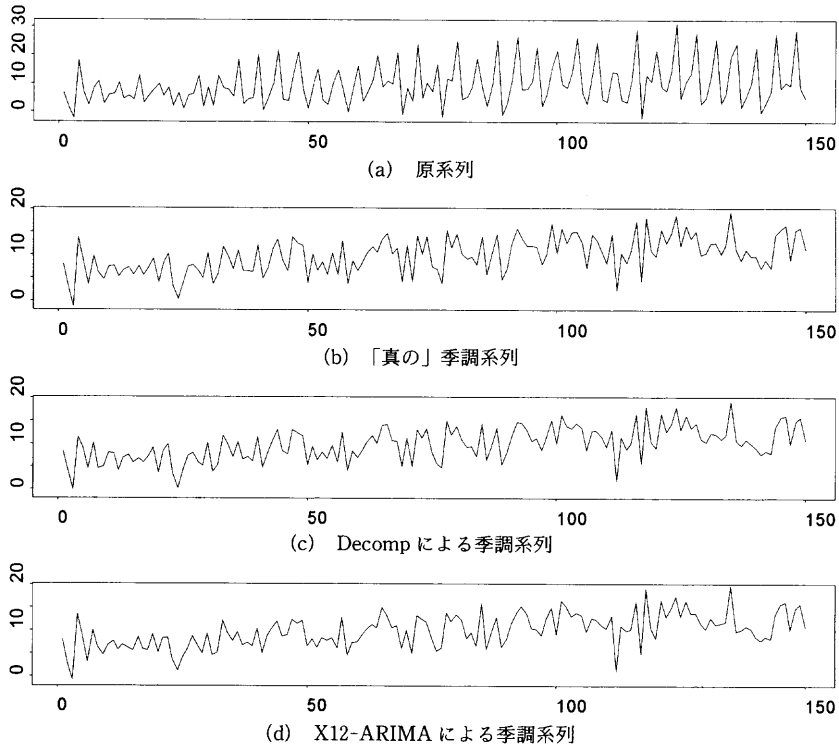
によって発生させる。ただしここで  $K = 6.94 \times 10^{-4}$ 、 $CP_t$  ならびに  $CP_t^{SA}$  は経済企画庁が発表した 1959 年第一四半期から 1996 年第二四半期までの国民消費支出の原系列と季節調整系列（年率換算）である。不規則成分  $I_t$  は平均ゼロ、分散  $\sigma^2$  の独立同一分布で、ここでは  $\sigma^2 = 49, 1, 10^{-6}$  の 3 通りのケースを実験した。これらを順に数値例 1, 2, 3 と言及する。また、 $\sigma^2 = 1$  のケースに限ってはあがあるが、季節変動が決定論的な場合の実験も行った。これを以降数値例 4 と呼ぶ。発生させたトレンドと観測ノイズを足したものを、ここでは便宜的に「真の」季調系列と呼ぶ。

なお DECOMP についてはトレンドの階差次元を 2、季節モデルの次数は 1 とし、定常 AR 項は含んでいない。X-12 に関しては特別なオプションは利用せずに標準型での解析を行っており、原則として乗法モデルをあてはめ、負の観測値が存在する場合に加法型を選択している。全て加法型による解析も行ったが、本稿の議論を左右する違いは見られなかったこと、実際の X-12 ユーザーの多くはおそらく標準型による解析を中心に利用するであろうことを考え、乗法モデルに基づく季調結果をベースに議論を進めていくこととした。

次に図の構成についてであるが、図 4～図 7 に共通して (a) は原系列  $X_t$  のプロット、(b) は「真の」季節調整済系列、(c) が DECOMP におけるトレンドと観測ノイズを足し合わせたもののプロット、(d) が X-12-ARIMA による調整結果のプロット、(e) は (c) と (d) の一階階差を取った系列のパワースペクトル対数値の同時プロットである。なお、スペクトルの描画にあたっては本稿では Akaike window (赤池・中川 (1972)) を用いてピリオドグラムを平滑化している。これは、いま我々の関心は全周波数領域での特性と言うよりはある特定の周波数でのピークや dip の鋭さに集中しており、そうしたピークや dip の存在をなるべく曖昧にしない重み関数が望ましいからである。

では以下でデータ解析の結果を検討する。図 4 に結果を示した数値例 1 は観測ノイズ過多の場合 ( $\sigma^2 = 49$ ) の結果である。これまでの知見からすれば、seasonal dip は理論的には存在するのだが顕在化しないということが予想されるが、得られた結果はその予想に沿うものである。DECOMP も X-12-ARIMA も推定されたスペクトルはほぼ同じであり、目立って seasonal dip が認められるわけではない。これら二つの季節調整済系列の時系列プロットについても、高精度を求めるとなると話は別であるが、図 4 (c) と (d) を見比べた程度ではおおむね良好な季節調整と言ってよいだろう。

数値例 2 (図 5) は、観測ノイズのレベルがイノベーションのレベルと極端に違わないという意味で中間的なケースでの実験を意図したものである。季調系列の一階階差をとった系列のスペクトルを同時プロットしたのが図 5 (e) であるが、これは両者を比較する際に典型的に見られる図である。X-12-ARIMA による季調系列には seasonal dip は顕在化していないものの、DECOMP の結果では dip が顕在化している。しかし dip の有無以上にここで注意すべきなのは、DECOMP に較べて X-12-ARIMA による季調系列の方が全周波数帯で様にノイズレベルが高いことである。スペクトルのプロットは対数スケールなので、わずかな違いが不規則成分の大きな変動につながることは注意を要する。実際このことは時間領域での時系列プロットに明瞭に反映されている (図 5 (c) と (d))。比較的滑らかな結果と比較的ノイズの多い結果と、外れ方が正反対な分どちらが「真の」系列に近いとは一概に言い難く、言ってみればこれはど



(e) 季調系列の1階差のパワースペクトル

図4. 数値例1:  $\sigma^2=49$  (観測ノイズ過多) の場合.

ちらも季調に失敗しているケースかもしれない。滑らか (DECOMP)、ノイズ過多 (X-12-ARIMA) という両者の外れ方が、季節調整法として固有の癖なのかどうかまでは本稿では判断し得ないが、次の実験はこの conjecture を補強するような実験結果になっている。

図6の数値例3は観測ノイズ過小のケースである。このように、取り出すべき信号が明瞭で殆ど観測ノイズの見られないケースというのは、四半期データには特に多いように思われる。

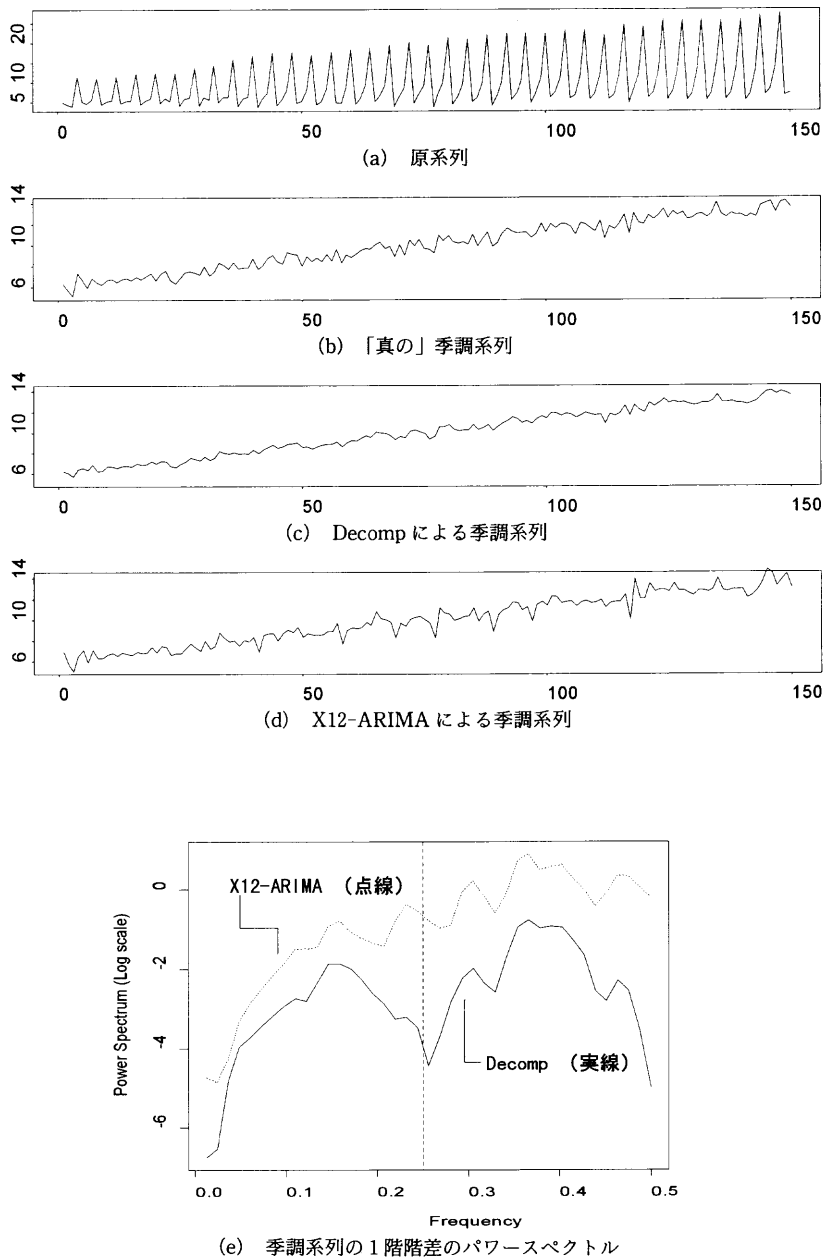


図5. 数値例2:  $\sigma^2=1$  の場合.

真の観測ノイズレベルが対信号比であまりに低いため、「真の」季調済系列のプロットは殆ど決定論的な関数にしか見えない(図6(b)). 両者の季調結果の違いは、この例では際だっている。季調系列の一階階差のスペクトルに関しては、dipの有無以前に、推定されたノイズレベルがあまりに隔たっており、時間領域におけるプロットでは、数値例2の結果以上にその傾向差が明らかである(図6(c)(d)). ただ、我々がひとつ留保をしなければならないのは、X-12-ARIMA

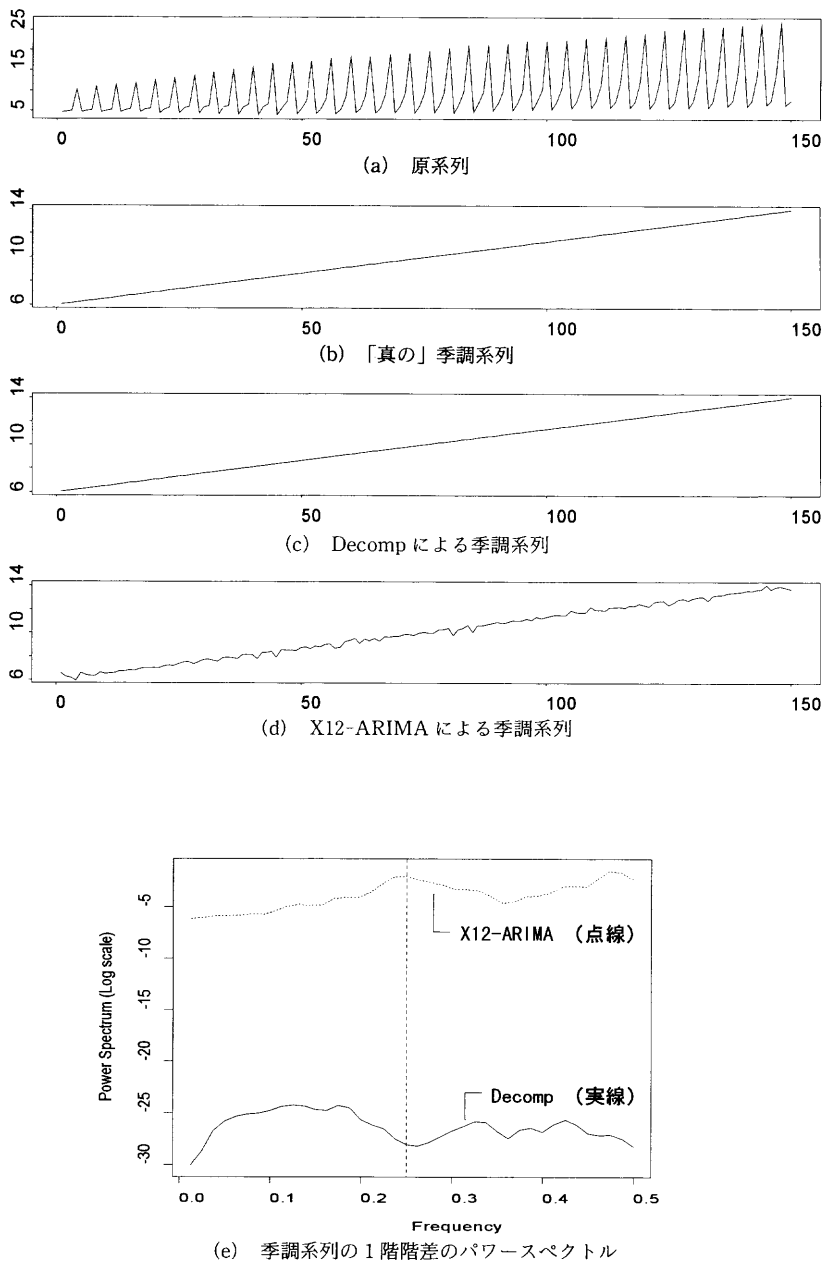
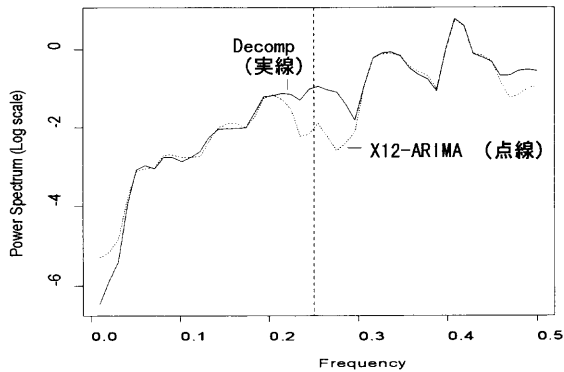
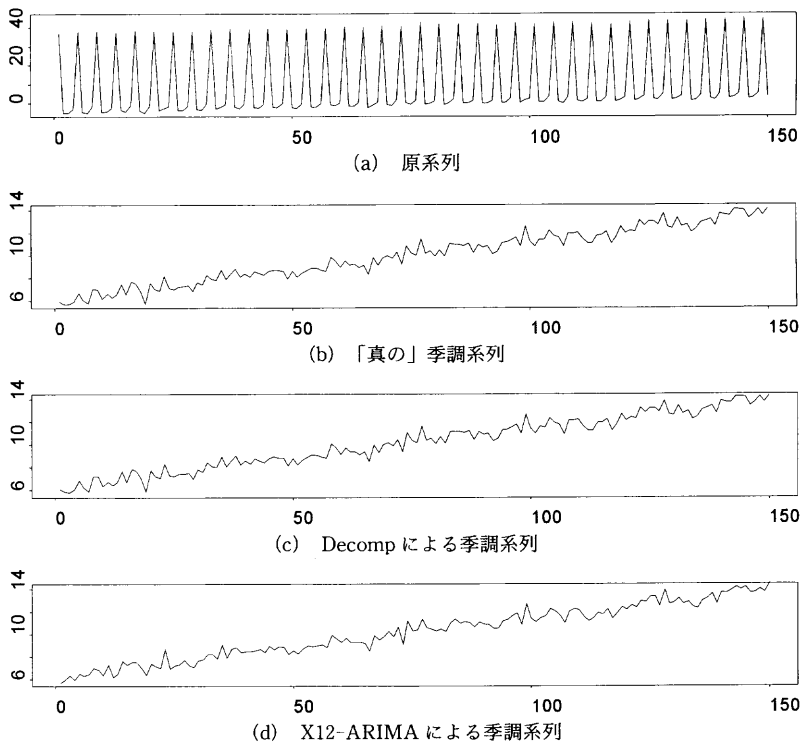


図6. 数値例3:  $\sigma^2=10^{-6}$  (観測ノイズ過少) の場合.

の使用にあたってはデフォルト設定で臨んだことであるが、これは留保と同時に X-12-ARIMA を使う際の実践的な教訓と言えるかもしれない。

数値例3のような場合、DECOMP では seasonal dip が表出する可能性が理論的な見地から高いことを前小節に述べた。実際的な立場から強調しておくべきは、そのときの季調系列がどの程度のノイズレベルにあるかのチェックが不可欠なことだろう。図7(e)によれば、



(e) 季調系列の1階階差のパワースペクトル

図7. 数値例4: 季節性が固定的な場合 ( $\sigma^2=1$ ).

DECOMP による季調系列のノイズレベルは殆どゼロと言ってよい。(実際数値例3はそのように作られており、DECOMP のほうがより正解に近い。) このようなケースで不規則成分に自己相関が見られたとしても、それは予測には勿論のこと季節調整にも殆ど影響を及ぼさないだろう。注意として換言すれば、推定された成分のスペクトルが持つパワーの高低にまず注目すべきであって、実際の季節調整に要求される精度に照らし合わせた上、必要なら個々のケースで

seasonal dip の問題を論じるのが適当であると思われる。

最後に、これも実際上興味のあるケースとして、季節性が固定的である場合を取り上げた。この数値例 4 では  $\sigma^2 \approx 0$  であるために、観測ノイズの分散 (実際には 1.0) が相対的に非常に大きいケースに分類される。従って dip は顕在化しにくいケースといえるが、実際に図 7(e) では両者とも dip の存在は明らかでない。X-12-ARIMA の結果では  $\pi/2$  周辺にくぼみが見えるが、これを dip と判断できるかどうかは微妙であろう。実践的な意味で重要なことは、数値例 4 に用いたデータは一見すると数値例 2,3 にむしろ近い性質の時系列と想像されるのに、実は観測ノイズ過多という意味では数値例 1 と同じケースだということである。(図 7(a) を図 4(a), 図 5(a), 図 6(a) と比較されたい。) この例からわかるように、見た目に季節変動が明瞭に認められるということと seasonal dip の顕在化には殆ど関連性がない。

### 3.3 考 察

3.2 の実験で、DECOMP に対してはその振る舞いがある程度予想されて、実際に予想に沿った結果を得た。X-12-ARIMA に関しては、信号抽出型季節調整における議論のアナロジーがどこまで適当か明らかではないが、前処理の部分のをぞけば X-12-ARIMA というのは基本的に X-11 と同一視してよい (國友 (1997))。X-11 がときにノイズ過多な調整を行うことは、これまでも例えば Shiskin and Plewes (1978) などに指摘されたことがあったが、一方で X-11 がどのような信号抽出型季節調整フィルタに対応するかの研究も 70 年代から進められてきた (Cleveland and Tiao (1976) など)。基本的に移動平均項数の変更等オプションを利用しない限りは、X-11 型フィルタの適用はどんな系列にも固定したある分散比で季節調整を行うことに相当する。そうした近似フィルタのパラメータ値に従えば、X-11 では不規則変動が DECOMP 流のアプローチより大きめに推定されていることを示唆する研究もある (例えば Harvey (1989) の 6.2.3 章を参照)。信号抽出型のモデルによる近似がある程度妥当性を持つとしてであるが、もし X-12-ARIMA の季調結果で seasonal dip の見られるケースが少ないというのであれば、それはノイズレベルが高めに推定されていることに起因しているのかもしれない。

ここまでの議論に立脚すれば、季節調整法の優劣の比較に seasonal dip の有無を持ち出すのは殆ど無意味と思われるが、そういう実証分析をいまなお目にする機会があったら、まずは不規則成分 (観測ノイズ) のノイズレベルに違いがないかどうか図 5(e) のようなスペクトルのプロットをチェックすることである。特に、季調済系列 (つまりレベル変数) のスペクトル密度をそのまま報告している事例には注意が必要である。経済時系列の多くは定常過程と見なすには無理があり、拡散過程で記述するのが適当と判断される場合が少なくない。このようなケースではスペクトルはもはや可積分ではなく、しかもその殆どをトレンド成分の貢献分が占めることになるため、不規則成分のノイズレベルの違いは表示スケールの問題から隠蔽されてしまうことがある。

本稿のねらいは、まず最小 MSE 規準によって季節調整フィルタを構成すれば必然的に seasonal dip が存在することをふまえて、その上で dip が顕在化するのがどういう状況なのかを描いてきた。我々の感触では、dip の有無と季節調整の良否の間には、明らかな関係が見いだせないように思われるが、かといって「最小 MSE だから seasonal dip があってよいのだ」という主張も、「seasonal dip があるから季節調整がうまくいっていない」という主張も、どちらも極端であるように思われる。

最小 MSE という規準そのものを見直すという作業にやや近い仕事として Ansley and Wecker (1984) が挙げられる。彼らのアイディアはまさにコロンブスの卵的な発想で、(2.6) における最適フィルタの平方根を季節調整フィルタとすれば季調系列から seasonal dip は理



論的に消滅する、というものである。すなわち  $(f_{TT}/f_{XX})^{1/2}$  をフィルタとすると

$$f_{TT}(\lambda) = \left\{ \left( \frac{f_{TT}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 f_{XX}(\lambda) = f_{TT}(\lambda)$$

となる。ここで注意を要するのは、Ansley and Wecker の主張は「seasonal dip のない最小 MSE フィルタを導ける」ということではなく、上述の言われてみれば自明な構成のフィルタがどのような弊害を持ち合わせているかの検討に主眼をおいていることである。その上で Ansley and Wecker の主要な論点を要約すると、まず第一に結果として得られたフィルタは、(2.6) で与えられるフィルタに MSE の意味で劣る。彼らの言葉を借りれば「推定されたスペクトルが想定した真のスペクトルに一致するという要請を満たすことで、MSE の意味でどの程度の推定精度の損失が起きるか」を、真のデータ生成過程既知の下で評価する式が提示されている。第二のより示唆に富む結果は、加法モデルに帰着されるタイプの季節調整法では構成要素の一つに限って真のスペクトルと推定されたスペクトルを一致させることはできても、他の要素に関して同時にそれを達成することは原理的に不可能だということである。これは  $f_{YY} = f_{YY}$  となるようにフィルタを構成すれば、そのしわ寄せは  $f_{SS}$  に行ってしまうことを意味している。なお、Ansley and Wecker の提案するフィルタを時間領域でどう実装しどう重み関数を導出するかは自明でないと思われる。

Ansley and Wecker に関連してもう少し補足すると、時折この文献を「seasonal dip をなくすという制約を課して最小 MSE フィルタを導出できる」というような形で引用する文献が散見されるが、これは誤解を招く表現である。上に見たように、ある要素の推定値系列のスペクトルに dip なしということからの必要条件としてあるフィルタが導き出されるわけではなく、ある(自明な)フィルタを採用すると dip がないという、充分性に関する主張しか本来なされていない。今後の研究課題として、必要条件としてある種のフィルタが導き出されるかどうかは興味を引くところである。

#### 4. ま と め

線形モデルの範囲内で、予測性の良さを規準に最適(時不変線形)フィルタを構成する限り、seasonal dip は必然的に生じる。すなわち、dip がないということと予測や推定が良いということは、トレードオフの関係にある。もし季調済系列のスペクトルに seasonal dip が顕著にあらわれていないとすれば、ベイズ型季節調整や信号抽出型季節調整といったモデルベースの季節調整法では、相対的に観測ノイズ(あるいは不規則成分)の分散が大きいため、ノイズに埋もれている可能性が高い。X-12-ARIMA においても状況は似通っていると類推されるが、デフォルト設定で季節調整を行うとややノイズ過多に調整してしまう傾向が見られるので、この点は注意を要するとともに今後多くの数値的経験の積み重ねが必要である。逆にもしこの傾向が的を得たものであれば、「X-12-ARIMA では seasonal dip が生じにくい」という主張はある程度理にかなったものであるが、同時にそれは予測性を犠牲にしている危険がある。観測ノイズの分散や季節パターンを変えて行った実験の結果からは、dip の有無と季節調整の良否に明らかな関係があるとは言い難いが、どういう季節調整が行われているかを間接的に知る手がかりにはなりうる。Hylleberg (1986) などを見ても、もはや seasonal dip の問題は解決済み扱いという印象を受けるが、一方で Grether and Nerlove (1970) の結果はいまもって逆説的に響く。Seasonal dip が現象として見られる見られないといった実証結果を漫然と並べ立てるレベルを超えて、季調済み系列に seasonal dip がないということの裏に何らかの推測統計的な規準に則った「最適性」が見つかるだろうか。いまなお seasonal dip を問題として取り上げるとし

たら、そのような方向での研究が望まれるところである。

## 謝 辞

統計数理研究所・北川源四郎教授には、日頃の討論で多くのことを教わりました。また、本稿を書ききっかけとなる討論をしてくださり、適切な文献を教えてくださいました。Yale 大学 Christopher Sims 教授に感謝致します。最後に、本稿の誤りならびに不適切な表現を指摘し、改稿にあたって参考になるコメントをしてくださった査読者の方に感謝致します。

## 参 考 文 献

- Akaike, H. and Ishiguro, M. (1980). BAYSEA, A Bayesian seasonal adjustment program, *Comput. Sci. Monographs*, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- 赤池弘次, 中川東一郎 (1972). 『ダイナミックシステムの統計的解析と制御』, サイエンス社, 東京.
- Ansley, C. F. and Wecker, W. E. (1984). On dips in the spectrum of a seasonally adjusted time series, comment on "Issues involved with the seasonal adjustment of economic time series" by W. R. Bell and S. C. Hillmer, *Journal of Business and Economic Statistics*, **2**, 323-324.
- Bell, W. R. (1984). Signal extraction for nonstationary time series, *Ann. Statist.*, **13**, 646-664.
- Burman, J. P. (1980). Seasonal adjustment by signal extraction, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A*, **143**, 321-337.
- Cleveland, W. P. and Tiao, G. C. (1976). Decomposition of seasonal time series: a model for the Census X-11 program, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **71**, 581-587.
- Findley, D. F., Monsell, B. C., Bell, W. R., Otto, M. C. and Chen, B. C. (1996). New capabilities and methods of the X12-ARIMA seasonal adjustment program (unpublished manuscript).
- Grether, D. M. and Nerlove, M. (1970). Some properties of "optimal" seasonal adjustment, *Econometrica*, **38**, 682-703.
- Harvey, A. C. (1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Hylleberg, S. (1986). *Seasonality in Regression*, Academic Press, London.
- Kitagawa, G. (1981). A non-stationary time series model and its fitting by a recursive filter, *J. Time Ser. Anal.*, **2**, 103-116.
- 北川源四郎 (1986). 時系列の分解プログラム DECOMP の紹介, 統計数理, **34**, 255-270.
- Kitagawa, G. (1989). Non-Gaussian seasonal adjustment, *Comput. Math. Appl.*, **18**, 503-514.
- 北川源四郎 (1997). 季節調整プログラム DECOMP とその後の展開, 統計数理, **45**, 217-232.
- 國友直人 (1997). 季節調整法 X-12-ARIMA の特長と問題点, Discussion paper 97-J-5, 東京大学経済学部.
- Nerlove, M. (1964). Spectral analysis of seasonal adjustment procedures, *Econometrica*, **32**, 241-286.
- Ozaki, T. and Thomson, P. (1994). A dynamical system approach to X-11 type seasonal adjustment, Research Memo., No. 498, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- Shiskin, J. and Plewers, T. J. (1978). Seasonal adjustment of the U. S. unemployment rate, *The Statistician*, **27**, 181-202.
- Sims, C. A. (1978). Comments on "seasonality, causation, interpretation and implications" by C. W. J. Granger, *Seasonal Analysis of Economic Time Series*, Proceedings of the Conference on the Seasonal Analysis of Economic Time Series, Washington D. C., 47-49, Department of Commerce, Bureau of Census, Washington D. C.
- Wallis, K. F. (1974). Seasonal adjustment and relation between variables, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **69**, 18-32.
- Whittle, P. (1963). *Prediction and Regulation by Linear Least Square Methods*, The English Universities Press, London.

## On the “Optimality” of Seasonal Adjustment Procedures

Yoshinori Kawasaki and Seisho Sato

(The Institute of Statistical Mathematics)

Seasonal adjustment procedures based on the minimum mean square error filter inevitably yield so-called seasonal dips at the seasonal frequency and its harmonics. First we review the classical issue that this is not an evidence of ‘over-adjustment’ but a characterization of such kind of filter. Then we give an answer to understand why we sometimes see seasonal dips and sometimes not, by analyzing the role of the variance of the irregular component in the framework of unobserved component models. Finally we make comparison between Kitagawa’s DECOMP and X12-ARIMA through artificial data sets which mimic the actual important cases in economic time series analysis. Close examination of four cases suggests us that power spectrum of an adjusted series by X12-ARIMA seemingly has no or less seasonal dips just because of its inherent tendency of noise-excessive adjustment. In another words seasonal dips are buried in the excessive level of noise.