統計数理 (1995)
第 43 巻 第 2 号 329–339

［原著論文］

拡張された Consecutive-k-out-of-n:F システムの寿命分布

総合研究大学院大学　北　門　利　英*

(1995 年 6 月　受付)

1. はじめに

信頼性理論におけるシステムの理論的な考察は，1960 年代から盛んに行われ，その基本的な部分は Barlow and Proschan (1981) にまとめられている．彼らの言葉を借りれば，システムとは“成分とその構造”ということになる．直列システム，並列システムそして k-out-of-n システムが代表的な例として知られている．このように構成されたシステムに対する主な関心は，その構造に応じて，システムの信頼度を求めることである．また，成分に寿命分布を仮定した場合は，システムの寿命分布および平均寿命を求めることも考察の対象となる．信頼度という面からみると，直列システムは，システムが機能する上で最低限の成分からなるので冗長性は低いが，信頼度も低い．逆に並列システムは，信頼度は高いが冗長性も高く，コスト面に問題がある．そして k-out-of-n システムは，その両者の間に位置する．

近年，比較的冗長性が低く，かつ信頼度の高いシステムとして注目されているものに，Consecutive-k-out-of-n:F システム (Con/k/n/F) がある．このシステムは，一列に並んだ n 個の成分のうち，連続した少なくとも k 個の成分が故障したときに故障する．通信システムやオイルパイプラインシステム等がその例である．Kontoleon (1980) と Chiang and Niu (1981) によって導入されて以来，このシステムに関する多くの研究が行われてきた．最近，平野 (1994) および Chao et al. (1995) において，Con/k/n/F とそれを拡張したシステムに関する詳しいレビューがなされている．前者では，*IEEE Transactions on Reliability* に発表された研究を中心に，これまで考察された点や，未解決の問題点等がまとめられている．さらに，システムの実例や，オーダー k の二項分布との関係についても言及されている．一方後者では，視点を信頼度と寿命分布を求めることに絞り，n を大きくしたときの漸近的な評価についても触れている．

本稿の目的は，Con/k/n/F を拡張したいくつかのシステムの寿命分布を，成分の生存時間を表す確率変数の順序統計量の分布の 1 次結合で表現することである．ただし，各成分の生存時間は，独立かつ同一な分布に従うとする．このような表現によって，システムの寿命分布に関する平均あるいは分散等の特性量を，順序統計量のモーメントの結果を用いて求めることができる．この結果，成分の寿命分布に含まれるパラメータが未知の場合，システムの生存時間を基にしたパラメータの推定が，モーメント法を用いて比較的容易に行える．なお，Con/k/n/F に関するこのような研究は，Aki and Hirano (1995) において行われた．その研究の拡張が，ここでの狙いである．

* 現 東京水産大学 水産学部：〒108 東京都港区港南 4–5–7.

本稿の以下の構成は次の通りである．次章において，システムの寿命分布を順序統計量の分布の1次結合で表す手順について説明する．第3章，第4章そして第5章では，それぞれ具体的に m-consecutive-k-out-of-n:F システム（m-Con/k/n/F），Circular m-consecutive-k-out-of-n:F システム（Circular-m-Con/k/n/F），そして Strict consecutive-k-out-of-n:F システム（Strict-Con/k/n/F）に対する寿命分布を与える．なお，上記3つのシステムに対する簡単な説明と関連論文については，各章の冒頭で与える．

2. システムの寿命分布について

この章では，システムの寿命分布を，成分の生存時間を表す確率変数の順序統計量の分布の1次結合で表現する方法について，これまでに行われたいくつかの研究を基に述べる．

各成分の生存時間を $\xi_1, \dots, \xi_n$ とし，独立かつ同一に寿命分布 $G(t)$ に従うものとする．$\xi_1, \dots, \xi_n$ の順序統計量を $\xi_{(1)} < \cdots < \xi_{(n)}$，$\xi_{(i)}$ の分布関数を $G_{(i)}(t)$ とする．また，システムの生存時間を T，寿命分布を $F(t)$ とする．

n 個の成分で構成されたシステムを $\{1, \dots, n\}$ と同一視する．成分 $\{c_1, \dots, c_s\}$ が故障しているとき，その順列を s-sequence とよぶ．また成分 $\{c_1, \dots, c_s\}$ の故障によってシステムが故障するとき，$\{c_1, \dots, c_s\}$ を s-cutset，システムが故障しなければ s-pathset とよぶ．さらに，s-cutset の順列を s-cutsequence という．ここでは，時間の経過を考慮に入れているので，最小な s-cutsequence だけを考える．ここで s-cutsequence $\{c_1, \dots, c_s\}$ が最小であるとは，$\{c_1, \dots, c_s\}$ の部分列 $\{c_1, \dots, c_l\}$（$l < s$）が l-cutsequence となり得ない時である．すなわち，$(s-1)$ 個の成分の故障した時点ではシステムは機能していて，s 個の成分の故障した時点でシステムが故障するような s-sequence を意味する．

いまあるシステムが，s 個の成分が故障した時点で故障したとする．このようにシステムの故障が s-cutsequence によって起これば，システムの生存時間は $\xi_{(s)}$ であり，寿命分布は $G_{(s)}(t)$ である．s-sequence の総数は，$n(n-1)\cdots(n-s+1)$ 通りある．そのうち s-cutsequence がいくつあるかが分かれば，$G_{(s)}(t)$ に対する重みが分かり，システムの寿命分布を $G_{(1)}(t), \dots, G_{(n)}(t)$ の1次結合で表現できる．以後，最小な s-cutsequence の総数を r_s とする．

システムの平均寿命や分布関数を s-cutsequence を利用して求める方法は，Con/k/n/F に対して議論されてきた．Bollinger and Salvia (1985) は，s-cutsequence の総数 r_s を用いて，Con/k/n/F の寿命分布や特性量を調べた．また r_s については，Hwang (1986, 1991b) の研究がある．r_s を重みとして Con/k/n/F の寿命分布 $F(t)$ を $G_{(1)}(t), \dots, G_{(n)}(t)$ の1次結合で表現する方法は，Aki and Hirano (1995) で与えられた．ここでは，一般的なシステムを対象に述べる．

いま A_s を s 個の成分の故障した時点でシステムが故障する事象とする．各成分の寿命分布が独立かつ同一で，どの s-sequence も等確率で起こることを考慮すれば，$F(t)$ は次のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
F(t) &= P(T \le t) \\
&= \sum P(A_s) P(T \le t \mid A_s) \\
&= \sum P(A_s) P(\xi_{(s)} \le t).
\end{aligned}
$$

ただし，和は $P(A_s)$ が正の値をとるところで考えるものとする．$P(A_s)$ を ω_s とおくと，これは r_s を用いて

$$\omega_s = \frac{r_s}{n(n-1)\cdots(n-s+1)}$$

と表せ，結局

(2.1) $$F(t) = \sum \omega_s G_{(s)}(t)$$

を得る．ただし，$\sum \omega_s = 1$ である．また，$G_{(s)}(t)$ は，一般に $G(t)$ を用いて

$$G_{(s)}(t) = \sum_{i=s}^{n} \binom{n}{i} \{G(t)\}^i \{1-G(t)\}^{n-i}$$

と表せる．

ところで r_s は，s-pathset の数から求めることができる．あるシステムに対する s-pathset の数を $\alpha(s)$ とする．このとき，

(2.2) $$r_s = (n-s+1)(s-1)!\alpha(s-1) - s!\alpha(s)$$

が成り立つ．上式の第1項は，$(s-1)$ 個の成分の故障ではシステムが故障せず，かつ s 個目の成分の故障が起こる s-sequence の数であり，第2項は，s 個の成分の故障でもシステムが故障しない s-sequence の数である．この差が r_s となる．このような r_s に対する見方は，Con/k/n/F において Hwang (1991b) や Aki and Hirano (1995) でされたが，一般のシステムにおいても成り立つことがそれらの議論からわかる．従って，$\alpha(s)$ を求めることが問題となる．

システムの寿命分布を (2.1) のように表現することの大きな利点は，システムの平均寿命とその分散を，次のように順序統計量の性質から求められる点にある．

(2.3) $$E[T] = \sum \omega_s E[\xi_{(s)}].$$

(2.4) $$V[T] = \sum \omega_s E[\xi_{(s)}^2] - (E[T])^2.$$

信頼性理論において，指数分布 $EP(\theta)$ $(\theta > 0)$ と Weibull 分布 $W(\theta,\ c)$ $(\theta > 0,\ c > 0)$ がよく仮定される．それぞれの分布関数は，指数分布では $G(t) = 1-\exp(-t/\theta)$，Weibull 分布では $G(t) = 1-\exp\{-(t/\theta)^c\}$ である．これらの分布を仮定したときの順序統計量のモーメントは，指数分布の場合，

$$E[\xi_{(s)}] = \theta \sum_{i=n-s+1}^{n} \frac{1}{i},$$

$$V[\xi_{(s)}] = \theta^2 \sum_{i=n-s+1}^{n} \frac{1}{i^2}$$

であり，また Weibull 分布の場合の l 次のモーメントは，

$$E[\xi_{(s)}^l] = \frac{n!}{(s-1)!(n-s)!} \theta^l \Gamma\left(1+\frac{l}{c}\right) \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} (-1)^j (n-s+1+j)^{-\left(1+\frac{l}{c}\right)}$$

である．このような順序統計量の性質については，例えば David (1980) または Johnson and Kotz (1970) 等を参照されたい．

信頼性分野において，単純ではあるがよく用いられるシステムに k-out-of-n:F システム (k/n/F) がある．これは，n 個の成分のうち，少なくとも k 個の成分が故障したときに故障するシステムである．k/n/F では，故障した成分の位置に無関係に，k 個の成分が故障した時点でシステムが故障するから，$\omega_k = 1$ であり，寿命分布は $G_{(k)}(t)$ に他ならない．このような観点から

$G_{(k)}(t)$ を見れば，(2.1) のように表現することは，$k/n/\mathrm{F}$ との対応がつくという意味でも有効である．

ここで，次のことに注意する．もし，$\alpha(s)$ が与えられれば，成分の生存確率が独立かつ同一で p の時，システムの信頼度は

$$h(p)=\sum_{s=0}^{n}\alpha(s)p^{n-s}(1-p)^{s}$$

で与えられる．また，別の方法によって，信頼度を求めることも可能であろう．p に時刻 t での生存確率 $1-G(t)$ を代入すれば，寿命分布は $F(t)=1-h(1-G(t))$ によっても求めることができる．また，T の平均や2次のモーメントについても，信頼度関数 $R(t)=1-F(t)$ を用いてそれぞれ，$E[T]=\int_0^{\infty}R(t)\,dt$, $E[T^2]=2\int_0^{\infty}tR(t)\,dt$ で求めることができる．しかし，前にも述べたように，(2.1) のように表すことは，平均や分散を求める際に，順序統計量の性質が使えるという点で有効である．第3章以降では，具体的なシステムに対する寿命分布を求める．

3. m-Con/k/n/F

この章では，m-Con/k/n/F の寿命分布および平均寿命を前章で求めた方法で求め，さらにいくつかの考察を与える．

3.1 m-Con/k/n/F とは

m-Con/k/n/F は，Griffith (1986) によって導入されたシステムで，一列に並んだ n 個の成分のうち，連続した少なくとも k 個の成分の故障が m ヶ所あるとき，故障するシステムである．ただし，故障した成分の連は，互いに重なり合わないように数える．すなわち，一度連続した k 個の成分の故障があれば，その時点で連の長さを0とし，新たに数える．$m=1$ のとき，Con/k/n/F となる意味でその拡張となっている．Papastavridis (1990) は信頼度について，成分の故障確率が独立で同一の分布に従う場合には明示的に，独立であるが同一でない場合については漸化式を与えている．また，成分の寿命分布に Weibull 分布を仮定し，システムの寿命分布の漸近的な性質を与えているが，厳密な分布についてはこれまで議論されていない．

3.2 s-pathset の数と信頼度

まず，m-Con/k/n/F の s-pathset の数を与える．

命題 3.1. $mk\le s\le n$ に対して，

$$\alpha(s)=\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n-s+j}{j}N_k(n-jk,s-jk). \tag{3.1}$$

ただし，

$$N_k(n,s)=\sum_{i=0}^{[n/k]}(-1)^i\binom{n-s+1}{i}\binom{n-ki}{n-s} \tag{3.2}$$

である．

証明. 機能している成分を S，故障した成分を F と表すことにする．ただし，独立同一な分布を考えているので，S,F 以外に区別できないものとする．まず，k 連続した F の連が丁度 j $(0\le j\le m-1)$ 組あるときの s-pathset の数について考察する．システムが故障しないように s 個の F をセルに分配する場合の数は，次のように求められる．

いま，S が $n-s$ 個あるから，S を仕切りとしたセルが $n-s+1$ 個あると考える．まず，j 組の k 個連続した F の連を $n-s+1$ 個のセルに分配する．このような分配の仕方は $\binom{n-s+j}{j}$ 通りある．さらに，残りの $s-jk$ 個の F を，$n-s+1$ 個の各セルに k 個以上入れないで分配すれば，システムは壊れない．一般に，s 個の区別のできないボールを $n-s+1$ 個のセルに各セルに k 個以上入れないように分配する場合の数は，Riordan (1958) によって，(3.2) で与えられている．

以上から

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \sum_{j=0}^{m-1}(k\text{ 連続した }F\text{ の連が丁度 }j\text{ 個あるときの }s\text{-pathset の数})\\ &= \sum_{j=0}^{m-1}\binom{n-s+j}{j}N_k(n-jk, s-jk)\end{aligned}$$

を得る．□

なお，$0 \le s \le mk-1$ のときは，どの成分に故障が起きてもシステムが故障しないから，$\alpha(s)=\binom{n}{s}$ である．

$\alpha(s)$ が与えられたことにより，(2.2) から r_s が得られ，さらに (2.1) から寿命分布を求めることができる．ところで，m-Con/k/n/F の場合，$s < mk$ に対して $\omega_s = 0$ である．また，ω_s が正の値をとる s の最大値 M は次のように与えられる．

命題 3.2. $m \le mk \le n$ に対して，

$$M=\left[n+m+1-\frac{n+1}{k}\right]$$

が成り立つ．ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数である．

証明. もっとも多くの F を必要とするシステムの故障の仕方を考える．$k-1$ 個の F の連が t 個と，システムの故障を引き起こす $(k+j_i)$ $(0 \le j_i \le k-1,\ i=1,\ldots,m)$ 個の F の連が m ヶ所あり，それらの間に S が入っている状態を考える．このためには，少なくとも S が $(t+m-1)$ 個なければならない．成分の数は n 個だから，

$$(k-1)t+\sum_{i=1}^{m}(k+j_i)+(t+m-1)\le n$$

という制約の下で，F の数

$$h(j_1,\ldots,j_m,t)=(k-1)t+\sum_{i=1}^{m}(k+j_i)$$

を最大にすればよい．この関数は

$$\begin{aligned}h(j_1,\ldots,j_m,t) &\le \frac{k-1}{k}\left\{n-m+1-\sum_{i=1}^{m}(k+j_i)\right\}+\sum_{i=1}^{m}(k+j_i)\\ &= \frac{k-1}{k}(n-m+1)+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}(k+j_i)\\ &\le \frac{k-1}{k}(n-m+1)+\frac{m(2k-1)}{k}\\ &= n+m+1-\frac{n+1}{k}\end{aligned}$$

のように評価でき，M が整数であることを考慮すれば命題が成り立つ．□

なお $m=1$ とすれば，命題3.1，命題3.2 および r_s の結果は，それぞれ Lambiris and Papastavridis (1985)，Hwang (1991b)，Satam (1991) によって得られた Con/k/n/F に対する結果と一致する．

3.3 寿命分布および平均寿命に対する考察

ここでは，m-Con/k/n/F の寿命分布と平均寿命に対するいくつかの考察を行う．

厳密な寿命分布を求める際，n の値が大きくなると，かなりの計算量が要求される．Papastavridis (1990) は，成分の寿命分布に Weibull 分布 $W(\theta, c)$ を仮定し，n を大きくしたときのシステムの生存時間 T_n の漸近分布を次のように与えた．

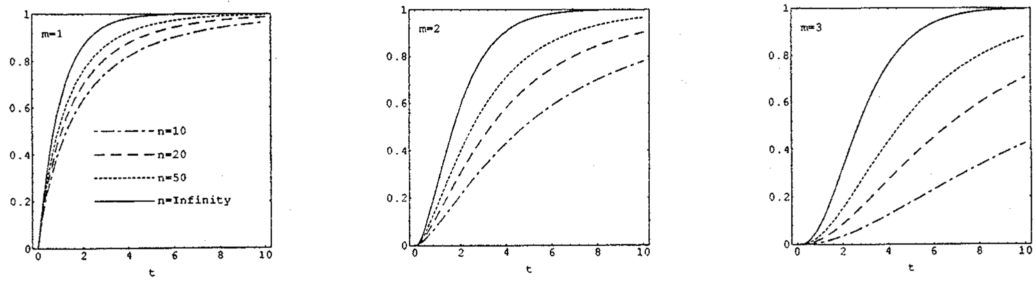
$$\lim_{n\to\infty} \Pr(n^{1/kc} T_n \le t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{ck}\right\}\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{cki}\frac{1}{i!}.$$

このような近似式は，Con/k/n/F に関する多くのシステムに対して与えられている．そこで，上記の漸近分布と，この章で得られた厳密な寿命分布 $F(n^{-1/kc}t)$ とを比較する．ここでは，$k=2, m=1,2,3$ とし，厳密な寿命分布は $n=10,20,50$ に対して求めた．図1の (a), (b), (c) はそれぞれ，$\theta=1$ と固定し，$c=0.5,1,2$ としたときの結果である．なお，図中の実線は漸近分布を，破線は厳密な分布を表し，実線に遠いものから $n=10,20,50$ の順である．図1から，次の考察が得られる．$m=1$ の時は比較的近似の精度が良いが，m の値が大きくなればなるほど，近似の精度の悪さが目立つ．また，c の値が小さいとき，特に $c=0.5$ の時には，極端に精度が悪くなる．

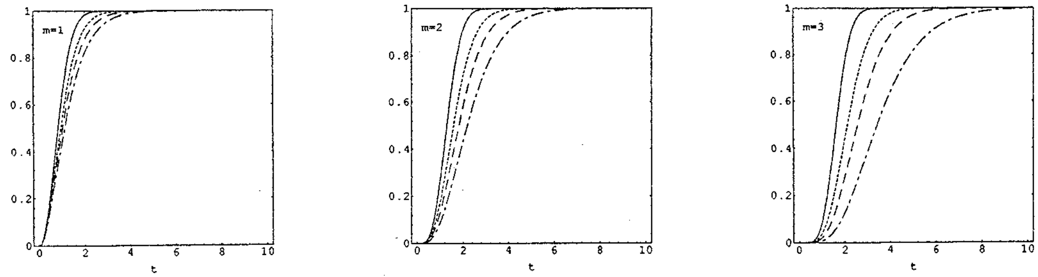
つぎに，いくつかのパラメータの値に対して平均寿命を具体的に求め，m の値を増加させたときの，平均寿命の伸びについて考察する．ここでは，$k=2, n=10,20,50$ において，$m=1,\ldots,5$ としたときの値を表1に示す．ただし，成分の寿命分布には Weibull 分布 $W(\theta,c)$ を仮定し，$\theta=1, c=0.5,1,2$ とした．θ は尺度母数だから，他の θ の値に対する平均寿命は，各値を θ 倍することによって求められる．表から，$c=0.5$ のとき，m を増加させたときの平均寿命の伸びが大きいことがわかる．$W(1,c)$ では，時刻 t での瞬間故障率が ct^{c-1} であり，$c<1, c=1$, そして $c>1$ のとき，それぞれ t の関数として減少，定数，そして増加関数となる．m の値を大きくすれば，システムが故障するまでの時間が長くかかり，$c<1$ の時には m の値を大きくする効果が，特に大きくなることが分かる．

表1. m-Con/2/n/F システムの平均寿命.

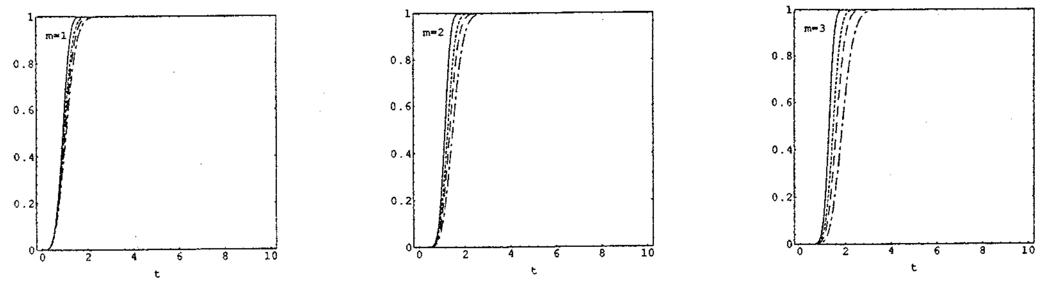
	$n=10$			$n=20$			$n=50$		
m	$c=0.5$	$c=1$	$c=2$	$c=0.5$	$c=1$	$c=2$	$c=0.5$	$c=1$	$c=2$
1	0.242	0.410	0.606	0.092	0.258	0.483	0.029	0.148	0.367
2	0.709	0.753	0.842	0.229	0.435	0.642	0.066	0.236	0.475
3	1.615	1.165	1.055	0.422	0.605	0.763	0.110	0.312	0.550
4	3.628	1.762	1.301	0.691	0.784	0.872	0.161	0.383	0.611
5	10.129	2.929	1.676	1.069	0.983	0.979	0.220	0.451	0.665



(a) $c=0.5$



(b) $c=1$



(c) $c=2$

図1. m-Con/2/n/Fにおける漸近分布と厳密な分布の比較.

4. Circular-m-Con/k/n/F

Circularシステムとは，一列に並んだn個の成分において，1番目とn番目をつなげたシステムで，この点を除けばCircular-m-Con/k/n/Fはm-Con/k/n/Fと同様に定義される．Circularシステムに対して，これまでのシステムをLinearシステムと呼ぶことがある．$m=1$のとき，単にCircular-Con/k/n/Fと呼ばれ，Derman et al.（1982）によって最初に考察された．

成分の故障確率が独立かつ同一の場合のCircular-Con/k/n/Fに対する信頼度は，Derman et al.（1982），Lambiris and Papastavridis（1985）とHwang（1986）で与えられている．またCircular-m-Con/k/n/Fについては，Hwang and Papastavridis（1991）で信頼度が求め

表2. Circular-m-Con/2/n/F システムの平均寿命.

	$n=10$			$n=20$			$n=50$		
m	$c=0.5$	$c=1$	$c=2$	$c=0.5$	$c=1$	$c=2$	$c=0.5$	$c=1$	$c=2$
1	0.218	0.389	0.590	0.088	0.251	0.477	0.028	0.146	0.365
2	0.630	0.711	0.818	0.217	0.424	0.634	0.065	0.234	0.472
3	1.417	1.092	1.021	0.399	0.588	0.753	0.107	0.309	0.547
4	3.199	1.651	1.259	0.650	0.761	0.859	0.158	0.379	0.608
5	10.129	2.929	1.676	1.001	0.952	0.963	0.216	0.446	0.661

られているが，それ以外の考察は見あたらない．ここでは，このシステムに対する s-pathset の数を与える．

命題 4.1. $mk \le s \le n-1$ に対して，

$$\alpha(s)=\frac{n}{n-s}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n-1-s+j}{j}N_k(n-1-jk,s-jk). \tag{4.1}$$

証明. Circular システムは，n 個の成分のうちどれか一つを S と固定すれば，$n-1$ 個の成分からなる Linear システムとなる．

いま i 番目の成分を S と固定する．このとき，システムが m-Con/k/$(n-1)$/F として故障しないような F の配分の仕方は，命題 3.1 の結果を用いれば，

$$\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n-1-s+j}{j}N_k(n-1-jk,s-jk)$$

で与えられる．このような S の固定の仕方は n 通りある．一方，故障していないシステムには，S が $n-s$ 個含まれている．その $n-s$ すべての成分で S を固定して考えれば，上のような数え方では，故障していない同じシステムを $n-s$ 回数えることになる．

このように考えれば，$\alpha(s)$ に対して，次の関係式が成り立つ．

$$(n-s)\alpha(s)=n\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n-1-s+j}{j}N_k(n-1-jk,s-jk).$$

よって，命題が成り立つ．□

なお $0\le s\le mk-1$ のときは，m-Con/k/n/F のときと同様に $\alpha(s)=\binom{n}{s}$ である．また $s=n$ のときは，すべての成分が故障すると必ずシステムが故障するから，$\alpha(n)=0$ である．

さらに，M についても命題 3.2 と同様の方法で導出できる．証明は省略する．

命題 4.2. $m\le mk\le n$ に対して，

$$M=\left[n+m-\frac{n}{k}\right].$$

表 2 において，このシステムに対する平均寿命を与えた．結果として，m-Con/k/n/F のときと同様の考察ができる．

5. Strict-Con/k/n/F

Strict-Con/k/n/F は，Bollinger (1985) によって提案されたシステムで，一列に並んだ n 個の成分のうち，k 個以上の連続した成分が故障し，かつ $k-1$ 以下の連続した故障成分がないとき，故障するシステムである．

このシステムに対する s-cutset の数は，Papastavridis (1986) と Kossow and Preuss (1987) によって，システムの信頼度を求める手順の中で求められている．その結果を利用することによって，s-pathset の数を以下のように与えることができる．

$$\alpha(s)=\binom{n}{s}-\sum_{i=1}^{[s/k]}\binom{n-s+1}{i}\binom{s-i(k-1)-1}{i-1}.$$

なお，このシステムについては，Rushdi (1990)，Hwang (1991a)，Papastavridis (1993) などで議論されている．

6. 最後に

本稿では，Con/k/n/F を拡張したいくつかのシステムの寿命分布について考察してきた．これまで寿命分布は，主に信頼度に成分の寿命分布を代入する形で求められてきた．しかし平均寿命や分散などは，複雑な形の寿命分布から直接求めることになり，発表された論文には誤りを含む場合もある．一方ここでの方法は，s-pathset の数 $\alpha(s)$ が与えられれば寿命分布が求まり，モーメントが比較的容易に求められる．

本稿では推定の問題に触れなかったが，システムの生存時間を観測することによってパラメータを推定する問題は，Con/k/n/F に対して Aki and Hirano (1995) で議論された．推定の際には，モーメント法が用いられている．ここで扱ったシステムについても，システムの生存時間のモーメントが容易に求められることから，モーメント法による推定が可能である．また，その精度についても，Con/k/n/F の場合と同様，良いことが予想される．

謝辞

本稿を作成するにあたり，平野勝臣教授に適切なコメントを頂きました．ここに感謝の意を表します．また貴重なご指摘とご意見を頂いた査読者の方々に感謝申し上げます．

参考文献

Aki, S. and Hirano, K. (1995). Lifetime distribution and estimation problems of consecutive-k-out-of-n: F systems, Research Memo., No. 539, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Barlow, R.E. and Proschan, F. (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, 2nd ed., Holt Rinehart and Winston, New York.

Bollinger, R.C. (1985). Strict consecutive-k-out-of-n:F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-34**, 50-52.

Bollinger, R.C. and Salvia, A.A. (1985). Consecutive-k-out-of-n:F system with sequential failures, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-34**, 43-45.

Chao, M.T., Fu, J.C. and Koutras, M.V. (1995). Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n:F

& related systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-44**, 120-127.

Chiang, D.T. and Niu, S. (1981). Reliability of consecutive-k-out-of-n:F system, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-30**, 87-89.

David, H.A. (1980). *Order Statistics*, 2nd ed., Wiley, New York.

Derman, C., Lieberman, G.J. and Ross, S.M. (1982). On the consecutive-k-of-n:F system, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-31**, 57-63.

Griffith, W.S. (1986). On consecutive-k-out-of-n failure systems and their generalizations, *Reliability and Quality Control* (ed. A.P. Basu), 157-165, North-Holland, Amsterdam.

平野勝臣 (1994). Consecutive-k-out-of-n:F システム, 統計数理, **42**, 45-61.

Hwang, F.K. (1986). Simplified reliabilities for consecutive-k-out-of-n:F systems, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, **7**, 258-264.

Hwang, F.K. (1991a). Comment on strict consecutive-k-out-of-n:F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-40**, p. 264.

Hwang, F.K. (1991b). An explicit solution for the number of minimal p-cutsequences in a consecutive-k-out-of-n:F system, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-40**, 553-554.

Hwang, F.K. and Papastavridis, S. (1991). Binary vectors with exactly k nonoverlapping m-tuples of consecutive ones, *Discrete Appl. Math.*, **30**, 83-86.

Johnson, N.L. and Kotz, S. (1970). *Continuous Univariate Distributions - 1*, Wiley, New York.

Kontoleon, J.M. (1980). Reliability determination of a r-successive-out-of-n:F system, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-29**, p. 437.

Kossow, A. and Preuss, W. (1987). Failure probability of strict consecutive-k-out-of-n:F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-36**, 551-553.

Lambiris, M. and Papastavridis, S. (1985). Exact reliability formulas for linear & circular consecutive-k-out-of-n:F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-34**, 124-126.

Papastavridis, S. (1986). Algorithms for strict consecutive-k-out-of-n:F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-35**, 613-615.

Papastavridis, S. (1990). m-consecutive-k-out-of-n:F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-39**, 386-388.

Papastavridis, S. (1993). Comment on: Strict consecutive-k-out-of-n:F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-42**, p. 171.

Riordan, J. (1958). *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, New York.

Rushdi, A.M. (1990). Some open questions on: Strict consecutive-k-out-of-n:F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-39**, 380-381.

Satam, M.R. (1991). Consecutive-k-out-of-n:F system: A comment, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-40**, p. 62.

Lifetime Distributions of Some Extended Consecutive-k-out-of-n:F Systems

Toshihide Kitakado

(The Graduate University for Advanced Studies)

A consecutive-k-out-of-n:F system is an ordered sequence of n components, it fails if and only if at least k consecutive components fail. The system has several variations, such as, m-consecutive-k-out-of-n:F system, circular m-consecutive-k-out-of-n:F system, and strict consecutive-k-out-of-n:F system. This paper discusses lifetime distributions of these systems, and shows the lifetime distribution of each system is expressed explicitly as a linear combination of distributions of order statistics of the lifetimes of n components when the lifetimes of n components are independently identically distributed. As a result, moments of the lifetime of each system can be easily obtained through moments of order statistics. Some examples to compare the exact distribution with the asymptotic one of m-consecutive-k-out-of-n:F system for large n are also given.

Key words: Consecutive-k-out-of-n:F system, m-consecutive-k-out-of-n:F system, circular m-consecutive-k-out-of-n:F system, strict consecutive-k-out-of-n:F system, s-pathset, s-cutsequence, lifetime distribution, mean failure time, order statistics.