ÜBER EINE NUMERISCHE METHODE ZUR AUFLÖSUNG DER KOMPLEXEN GLEICHUNGEN*)

SATOKI NINOMIJA

(Eingegangen am 4. Juni, 1964; verbessert am 6. Mai, 1965)

1. Einleitung

Es gibt einige Methoden womit man eine nichtlineare Gleichung $f(x)=0$ auflöst. Vor allem erinnert man sich an die berühmte Methode von Newton, wodurch man eine beliebige Funktion $f(x)$ rekursiv numerisch lösen kann. Als andere Methoden gibt es einige von Bairstow, Graeffe u.s.w. Jede hat ja auch einige starke-Seiten. Aber diese Methoden sind noch nicht so mächtig für die beliebige Gleichung. In dieser Abhandlung behandeln wir hauptsächlich die Methode, mit der man allgemeine komplexe Gleichungen nicht nur algebraische oder rationale auflösen kann. Wir wenden dort an, daß das Winkel die Abbildung eines Winkels um die Nullstelle in der z-Ebene ist, um den Nullpunkt in der $f(z)$-Ebene das Produkt der Ordnung mit dem Winkel der Nullstelle in der z-Ebene ist.

Im Abschnitte 2 findet man die theoretischen Diskussionen, im Abschnitte 3 eine praktische Methode dafür und im Abschnitte 4 einige Beispiele.

2. Formulierung des Problems und Auflösungsverfahren

Es sei eine komplexswertige Funktion $f(z)$ gegeben. Das Problem ist, eine gewisse Nullstelle z_0 von $f(z)$ numerisch zu geben, wobei erklärt sich von vornherein ein Punkt z_1 als ein Näherungspunkt von z_0. Mit anderen Worten ist das Problem die Gleichung

$$(1) \qquad f(z)=0$$

annähernd numerisch aufzulösen.

*) Das Hauptergebnis dieser Abhandlung wurde schon in November 1959 als ein Report für "numerische Analysis" an der Naturwissenschaftliche Universität Tokio eingereicht (aber noch nicht veröffentlich).

Der Verfasser möchte gern Herrn Dr. H. Akaike, Herrn Dr. Y. Suzuki für ihre nützlichen Räte, auf welchen er den Entwurf verbessert hat, und Herrn Dr. K. Matusita, Herrn Dr. I. Higuti, Herrn Prof. Dr. K. Isii für ihre Ermutigungen bei der Unternehmung herzlich danken.

Mit α bezeichnen wir die Ordnung der Wurzel z_0, die wir mit dem "Prinzip von Argument" ausrechnen können. Im praktischen Problem, z. b. im Entwurf des Siebes findet man manchmal, daß die Ordnung α schon gekannt ist.

Dann kann man $f(z)$ in der Form

$$f(z)=(z-z_0)^{\alpha}g(z) \tag{2}$$

schreiben, wo $g(z)$ eine Funktion ist, die für z_0 nicht verschwindet: $g(z_0)\neq 0$. Ferner lässt sich $g(z)$ offenbar darstellen in der Form

$$g(z)=g(z_0)+h(z)\ , \tag{3}$$

wobei $h(z)$ eine Funktion ist, die für z_0 verschwindet: $h(z_0)=0$.

Aus z_1 bilden wir drei Punkte z_{11}, z_{12}, z_{13}, die auch Näherungswurzeln von z_0 sind. Die Erzeugungsmethode dieser drei Punkte wird nachher erwähnt.

Dann erhalten wir offenbar wegen (1)

$$\frac{1}{\alpha}\arg\frac{f(z_{11})}{f(z_{12})}=\theta_{12}+\frac{1}{\alpha}\arg\frac{g(z_{11})}{g(z_{12})}\ , \tag{4}$$

wo

$$\theta_{12}=\arg\frac{(z_0-z_{11})}{(z_0-z_{12})}\ ,$$

und

$$\frac{1}{\alpha}\arg\frac{f(z_{12})}{f(z_{13})}=\theta_{23}+\frac{1}{\alpha}\arg\frac{g(z_{12})}{g(z_{13})}\ , \tag{5}$$

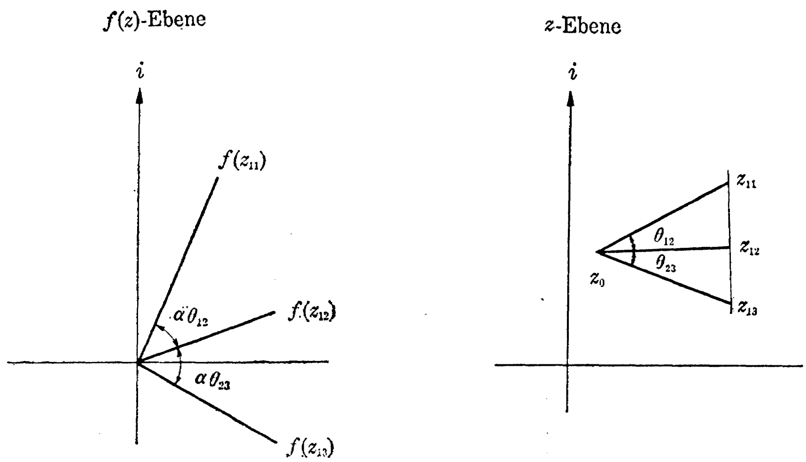
wo

$$\theta_{23}=\arg\frac{(z_0-z_{12})}{(z_0-z_{13})}\ .$$

Insbesondere, wenn die Funktion $f(z)$ nur eine Wurzel hat (natürlich von einer beliebigen Ordnung), dann verschwinden die letzten Terme von (4) und von (5). Also mit diesen (in diesem Fall geeignet ausgewählten) drei Punkten können wir durch (4) und durch (5) die Argumente θ_{12} und θ_{23} richtig genau berechnen. Mit diesen drei Punkten z_{11}, z_{12}, z_{13} und mit den richtig berechneten Argumenten θ_{12} und θ_{23} kann man die echte Wurzel z_0 nur durch die elementar-geometrische Methode richtig ausrechnen.

Indessen bekommen wir zwei Lösungen: eine die gesuchte Wurzel ist und die andere doch nicht.

Im allgemeinen Fall, wo die Funktion $f(z)$ nur eine Wurzel nicht hat (d.h. mehr als 2 Wurzeln und, oder mehr Pole), verschwinden die letzten Terme von (4) und von (5) nicht immer. Wenn aber die Nähe-



rungswurzel z_1 von z_0 ein wenig abweicht, dann sind diese Terme sehr klein. Und wir erhalten die asymptotischen Winkel $\hat{\theta}_{12}$ und $\hat{\theta}_{23}$. Also können wir auch in diesem Fall zu einer asymptotischen Wurzel z_0 gelangen.

Mann kann denn oben gesagten Inhalt mathematisch ausdrücken: Wenn für eine kleine Konstante ε',

$$\left|\frac{h(z_{1j})}{g(z_0)}\right| < \frac{\varepsilon'}{2}, \qquad j=1,\ 2,\ 3 \tag{6}$$

gilt, ist unsere Methode wirksam. Lässt uns den letzten Term von (4) umschreiben:

$$\arg\frac{g(z_{11})}{g(z_{12})} = \arg\left(1+\frac{h(z_{11})}{g(z_0)}\right) - \arg\left(1+\frac{h(z_{12})}{g(z_0)}\right). \tag{7}$$

Das können wir folgendermaßen überzeugen. Aus (6) erhalten wir offenbar

$$\left|\arg\frac{g(z_{11})}{g(z_{12})}\right| < \varepsilon' \tag{8}$$

und

$$\left|\arg\frac{g(z_{12})}{g(z_{13})}\right| < \varepsilon' \tag{8'}$$

Aus (4) und (5), erhalten wir die Ungleichungen

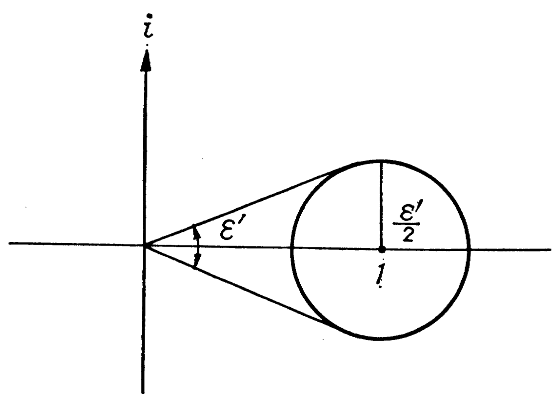
$$(9)\qquad \frac{1}{\alpha}\left(\arg\frac{f(z_{11})}{f(z_{12})}-\varepsilon'\right)<\theta_{12}<\frac{1}{\alpha}\left(\arg\frac{f(z_{11})}{f(z_{12})}+\varepsilon'\right),$$

$$\text{od. } \hat{\theta}_{12}-\varepsilon<\theta_{12}<\hat{\theta}_{12}+\varepsilon,$$

und

$$(9')\qquad \frac{1}{\alpha}\left(\arg\frac{f(z_{12})}{f(z_{13})}-\varepsilon'\right)<\theta_{23}<\frac{1}{\alpha}\left(\arg\frac{f(z_{12})}{f(z_{13})}+\varepsilon'\right),$$

$$\text{od. } \hat{\theta}_{23}-\varepsilon<\theta_{23}<\hat{\theta}_{23}+\varepsilon .$$



Wenn für eine genügend kleine Konstante ε' (6) gilt, so haben wir aus (9) und (9') die genügend asymptotischen Winkel θ_{12}, θ_{23}.

Und auch die Wurzel, die mit diesen $\hat{\theta}_{12}$, $\hat{\theta}_{23}$ durch eine geometrische Methode abgeschätzt wird, liegt genügend nahe an z_0. Man kann die gesuchte Wurzel näher abschätzen, indem man die obene bekommene Wurzel z_2 als der Anfangsnäherungswert benuzt und denselben Verfahren wiederholt.

Dabei aber die folgende Bedingung müßte genügt werden. Man bildet das Gebiet, worin die echte Wurzel liegt, mit den Kreisliniewinkeln $\hat{\theta}_{12}-\varepsilon$, $\hat{\theta}_{23}-\varepsilon$, $\hat{\theta}_{12}+\varepsilon$, und $\hat{\theta}_{23}+\varepsilon$.

Es sei

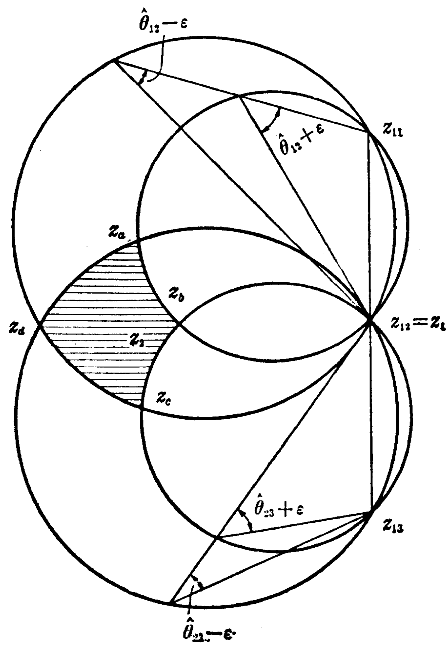
$$|z_2-z_m|=\max\{|z_2-z_a|,\ |z_2-z_b|,\ |z_2-z_c|,\ |z_2-z_d|\},$$

wo

$$|z_2-z_a|=\left|\frac{2\delta\sin\hat{\theta}_{12}\sin\hat{\theta}_{23}\sin(\hat{\theta}_{12}+\hat{\theta}_{23})+i\sin(\hat{\theta}_{23}+\hat{\theta}_{12})\sin(\hat{\theta}_{23}-\hat{\theta}_{12})}{4\sin^2\hat{\theta}_{12}\sin^2\hat{\theta}_{23}+\sin^2(\hat{\theta}_{23}-\hat{\theta}_{12})}\right.$$

$$-\frac{2\delta\sin(\hat{\theta}_{12}+\varepsilon)\sin(\hat{\theta}_{23}-\varepsilon)\sin(\hat{\theta}_{12}+\hat{\theta}_{23})+i\sin(\hat{\theta}_{23}-\hat{\theta}_{12}-2\varepsilon)\sin(\hat{\theta}_{12}+\hat{\theta}_{23})}{4\sin^2(\hat{\theta}_{12}+\varepsilon)\sin^2(\hat{\theta}_{23}-\varepsilon)+\sin^2(\hat{\theta}_{23}-\hat{\theta}_{12}-2\varepsilon)}\Bigg|$$

und $|z_2-z_b|$, $|z_2-z_c|$, $|z_2-z_d|$ solche Formen sind.



Und es sei

$$|z_1-z_n|=\min\{|z_1-z_a|,\ |z_1-z_b|,\ |z_1-z_c|\}$$

wo

$$|z_1-z_a| = \left|\frac{2\delta\sin(\hat{\theta}_{12}+\varepsilon)\sin(\hat{\theta}_{23}-\varepsilon)\sin(\hat{\theta}_{12}+\hat{\theta}_{23})+i\sin(\hat{\theta}_{23}-\hat{\theta}_{12}-2\varepsilon)\sin(\hat{\theta}_{12}+\hat{\theta}_{23})}{4\sin^2(\hat{\theta}_{12}+\varepsilon)\sin^2(\hat{\theta}_{23}-\varepsilon)+\sin^2(\hat{\theta}_{23}-\hat{\theta}_{12}-2\varepsilon)}\right|$$

und $|z_1-z_b|$, $|z_1-z_c|$ solche Formen sind.

Also wenn

$$|z_2-z_m|<|z_1-z_n| \tag{10}$$

ist, dann gilt

$$|z_2-z_0|<|z_1-z_0|.$$

Diese Bedingung, die man mit $\hat{\theta}_{12}$, $\hat{\theta}_{23}$ und ε konstruiert, ist aber sehr kompliziert, und man findet es nicht praktisch. Wir bezeichnen hier einige diese Bedingungen der genügenden Lösungen, die man meistens immer mit dem gegebenen kleinen ε anwenden kann.

$$\text{(11)}\qquad \begin{aligned} \text{a)}\quad & \hat{\theta}_{12}+\varepsilon\,,\ \hat{\theta}_{23}+\varepsilon < 1.046 \\ & \hat{\theta}_{12}-\varepsilon\,,\ \hat{\theta}_{23}-\varepsilon > 0.697 \\ \text{b)}\quad & \hat{\theta}_{12}+\varepsilon\,,\ \hat{\theta}_{23}+\varepsilon < 0.523 \\ & \hat{\theta}_{12}-\varepsilon\,,\ \hat{\theta}_{23}-\varepsilon > 0.348\,. \end{aligned}$$

Genügen die berechneten Winkel genügen dieser Ungleichung (11) nicht, dann ändert man die Strecke δ größer, damit z_{11}, z_{12}, z_{13} in D liegen, wo (9) und (9′) gelten. Von dieser Beispiel a) kann man verstehen, wenn $\hat{\theta}_{12}$, $\hat{\theta}_{23}$ um 0.872 sind, dann kann der Fehlerwert ε nur kleiner als $0.174(=(1.046-0.697)/2)$ sein.

3. Praktische Rechnung

Um die Wurzel von $f(z)=0$ mit dieser Theorie praktisch zu rechnen, man mag diese (Fig.) Rechnenflußbild folgen. Aus dem theoretischen Punkt gibt es eine bessere Methode, aber ich glaube, es eine gute Methode für unsere ziemliche kleine Rechenanlage ist.

Durch diese Rechnenflußbild erhält man die bessere Näherungswurzel von z_0, wenn eine Näherungswurzel gegeben wird. Jetzt nehme ich verläufig $k_1=30$ und $k_2=100$ auf und bekomme ein genügend gutes Ergebnis.

Durch die elementare geometische Methode erscheint sich man zwei Lösunge $z_{j+1}^{+,-}$,

$$\text{(12)}\qquad z_{j+1}^{+,-}=z_j\pm\frac{2\delta\sin\hat{\theta}_{12}\sin\hat{\theta}_{23}\sin(\hat{\theta}_{23}+\hat{\theta}_{12})+i\sin(\hat{\theta}_{23}-\hat{\theta}_{12})\sin(\hat{\theta}_{23}+\hat{\theta}_{12})}{4\sin^2\hat{\theta}_{12}\sin^2\hat{\theta}_{23}+\sin^2(\hat{\theta}_{23}-\hat{\theta}_{12})}\,.$$

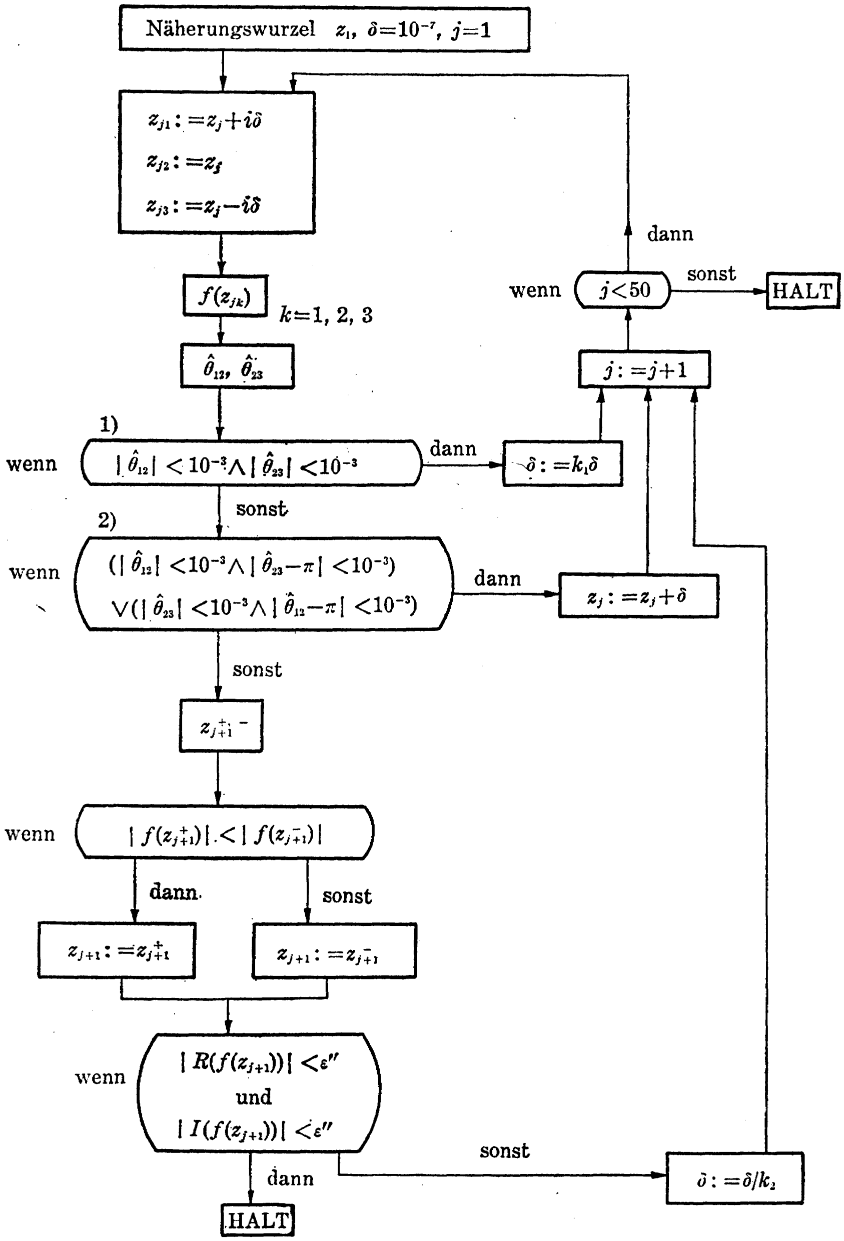
Wie gesagt, ist die eine von $z_{j+1}^{+,-}$ die gesuchten Wurzel. Aus der Eigenschaft der funktiontheoretischen Abbildung mag man die Zeichen des letzten Teils von (12) entscheiden, praktisch aber braucht man dieses Theorem doch nie. Als Ersatz nimmt man der Rekursionswert z_{j+1} denselben Wert auf, welcher den kleineren Wert von $|f(z_{j+1}^{+,-})|$ ergibt.

4. Beispiele

Mann weiß doch nicht über das Gebiet (die Menge von z), das der

Figur

Rechnenflußbild



1), 2) Wenn θ_{12} und θ_{23} so klein sind, so kann man nicht gut die Winkel $\hat{\theta}_{12}$ und $\hat{\theta}_{23}$ numerisch rechnen, und z_2 auch nicht. Dabei ändert man die Strecke δ oder z_j. Natürlich theoretisch gibt es andere bessere Methode.

Bedingung (6) oder (10) genügt, solange man nur unvollkommene Information von der gegebenen Funktion $f(z)$ hat. Die Bedingung (6) oder (10) hat also keine praktische Bedeutung. In der Praxis beginnen wir von einem Wert z_1, worüber $|f(z_1)|$ ziemlich klein wird. Mit dem folgenden Beispiele zeigen wir, daß das Gebiet, worin man eine bestimmte Wurzel erhält, etwas weiter ist, als das genügende Gebiet von (6) oder (10).

30 $z(z+10)^2=0$

$\alpha=1$

j	x	y	δ	*
1	4.0000000000−00	2.0000000000−00	1.0000000000−00	
2	1.2512263575−00	1.4812168122−00	1.0000000000−00	−1
3	−3.0370827630−01	6.7759219015−01	1.0000000000−02	−1
5	−3.9141444430−01	1.8148955396−01	3.0000000000−03	1
7	6.6095828079−03	−4.5779878458−02	9.0000000000−04	−1
9	1.4540558641−02	2.6795179671−03	2.7000000000−04	1
10	3.7910659472−05	2.2792626766−05	2.7000000000−06	−1
11	1.7024459620−10	3.5111075158−10	2.7000000000−08	−1
12	3.4048919513−10	−2.0913243468−18	2.7000000000−10	1

Dieser Anfangswert ist passend, und z_j konvergiert sehr schnell gegen die echte Wurzel. Wenn braucht man " $+$ " Teil von (11), dann schreibt man in $*$ " $+1$ ", anderenfalls " -1 ".

31 $z^2(z+10)=0$

$\alpha=2$

j	x	y	δ	*
1	4.0000000000−00	0.0000000000−40	1.0000000000−00	
2	−1.0952827778−00	2.7200537973−07	1.0000000000−00	−1
3	−4.0006297606−00	−2.1597231530−03	1.0000000000−02	1
5	−2.2286891814+01	1.0198843656+01	3.0000000000−03	−1
8	−1.0335553602+01	4.1783232995−00	2.7000000000−02	−1

j	x	y	δ	*
10	−1.4910747457+01	−3.2019664178−00	8.1000000000−03	1
12	−1.0154971594+01	−1.0647945494−00	2.4300000000−03	−1
14	−1.0525842162+01	3.1145133167−01	7.2900000000−04	1
16	−1.0000115850+01	2.0138849362−02	2.1870000000−04	−1
19	−1.0000303499+01	−3.4911615667−03	1.9683000000−03	1
20	−1.0000699730+01	4.8968401200−04	1.9683000000−05	1
21	−1.0000806612+01	1.6110037030−04	1.9683000000−07	1
24	−1.0000825334+01	3.7661680101−05	1.7714700000−06	1
26	−1.0000821610+01	9.3102748317−05	5.3144100000−07	−1
28	−1.0000821605+01	9.5116221267−05	1.5943230000−07	−1
31	−1.0000786613+01	2.6201839348−04	1.4348907000−06	−1
33	−1.0000786584+01	2.6716631506−04	4.3046721000−07	−1
35	−1.0000350727+01	−1.9940919670−04	1.2914016300−07	−1
38	−1.0000410301+01	−3.5447596627−05	1.1622614670−06	1
40	−1.0000410398+01	−2.9148748643−05	3.4867844010−07	1
42	−1.0000120088+01	1.6859458060−04	1.0460353203−07	−1
44	−1.0000168317+01	2.2721562605−04	3.1381059609−08	−1
47	−1.0000181084+01	1.4497729583−04	2.8242953648−07	1
49	−1.0000075767+01	3.4315649257−05	8.4728860945−08	1

Bei diesem Beispiel ziele ich auf die Wurzel $z=0$, aber durch den numerischen Fehler konvergiert z_j zu der Wurzel $-10+0i$, wo die Ordnung der Wurzel nicht 1, sondern 2 ist, daher ist die Konvergenz langsam.

32 $z^6(z+1)(z+10+10i)=0$

32·1 $\alpha=6$

j	x	y	δ	*
1	4.0000000000−00	1.0000000000−00	1.0000000000−00	
2	3.8123208912−00	1.3771338288−00	1.0000000000−00	1
3	7.8564121009−01	5.9858357087−01	1.0000000000−02	1
4	4.4806185970−02	1.8686007616−01	1.0000000000−04	1
7	−2.3104267106−02	−9.1323948823−03	9.0000000000−04	1
8	−2.5140842388−03	−2.0988035588−03	9.0000000000−06	1
10	−9.6133469903−05	−3.6635586613−04	2.7000000000−06	1
12	1.3403654111−05	−8.3790123080−06	8.1000000000−07	1
13	9.8933149328−07	−1.7266035469−06	8.1000000000−09	1
18	5.7606794874−05	1.1107924718−04	6.5610000000−05	1
19	−4.8269955395−06	7.8952725200−06	6.5610000000−07	1
20	3.0052434932−07	7.0617005642−07	6.5610000000−09	1
25	3.7318117183−05	9.0518988061−05	5.3144100000−05	1
26	−4.0517381942−06	4.5101195623−06	5.3144100000−07	1
27	1.8824722489−08	6.2620137986−07	5.3144100000−09	1
32	2.8110886393−05	7.3037428897−05	4.3046721000−05	1
33	−3.2269267539−06	3.2495657674−06	4.3046721000−07	1
34	−2.1873118169−06	−3.0322641626−06	4.3046721000−09	1
36	8.3821135428−08	−3.3345218113−07	1.2914016300−09	1
41	7.5288921472−06	1.7343808609−05	1.0460353203−05	1
42	−7.7906475739−07	9.3899561326−07	1.0460353203−07	1
46	1.2045357748−05	4.7922195426−05	2.8242953648−05	1
47	−1.7128848950−06	1.0056500868−06	2.8242953648−07	1

32·2 $\alpha=6$

j	x	y	δ	*
1	4.0000000000−00	1.0000000000−00	4.0000000000−00	
2	4.0356945521−00	7.7078677118−01	4.0000000000−00	−1
3	9.5625563296−01	3.4779800669−01	4.0000000000−02	1
4	1.5865361870−01	1.3178303712−01	4.0000000000−04	1
6	4.7549153032−03	2.9292221338−02	1.2000000000−04	1
8	−1.1856321514−03	−4.1376810191−04	3.6000000000−05	1
9	−1.3900871285−04	−1.0064846267−04	3.6000000000−07	1
11	−7.8923550846−06	−1.9268248653−05	1.0800000000−07	1
13	8.6081873982−07	−9.5015604701−07	3.2400000000−08	1
18	1.7814684218−04	4.4159695267−04	2.6244000000−04	1
19	−1.9773834387−05	2.1216837656−05	2.6244000000−06	1
20	−1.1216852169−08	3.0493722419−06	2.6244000000−08	1
24	−2.9392552162−08	−4.0048368182−06	7.0858799999−06	1
26	−5.0339103291−08	−2.0525470086−06	2.1257640000−06	1
29	1.2014811684−05	3.0067875598−05	1.9131876000−05	1
30	−1.3385773589−06	1.4236815294−06	1.9131876000−07	1
34	2.2714158777−05	8.7381721679−05	5.1656065199−05	1
35	−3.1964958546−06	1.9488003915−06	5.1656065199−07	1
36	−1.3672753156−06	−4.7428729517−06	5.1656065199−09	1
38	1.8476947055−07	−1.2790404767−07	1.5496819560−09	1
43	1.1013187148−05	2.1472890220−05	1.2552423843−05	1
44	−9.3676137933−07	1.5015665550−06	1.2552423843−07	1
48	1.4284757435−05	5.7688938890−05	3.3891544377−05	1
49	−2.0413333610−06	1.1770696866−06	3.3891544377−07	1

Wenn die Ordnung der Wurzel gross ist, dann ist das Gebiet auch weit, worin man die zielende Wurzel erhält. Im Fall $j=13$ haben wir schon die Wurzel $\hat{z}_0$, worüber $|R(f(\hat{z}_0))|<10^{-38}$ und $|I(f(\hat{z}_0))|<10^{-38}$ gelten. (Sieh 33·3)

33 $z^2(z+5i)/(z+10+10i)=0$

33·1 $\alpha=2$

j	x	y	δ	*
1	4.0000000000−00	5.0000000000−00	1.0000000000−00	
2	1.3194201441−02	3.5830330213−00	1.0000000000−00	1
3	5.6807728725−00	6.3103606253−00	1.0000000000−02	−1
5	7.9766872864−01	4.8162790487−00	3.0000000000−03	1
7	−4.0161632783−00	2.0714045180−00	9.0000000000−04	1
10	1.0728693370+01	4.1107612141−01	8.1000000000−03	1
12	6.2127957550−00	1.9139720919−01	2.4300000000−03	1
14	3.0483272870−00	5.5317875676−02	7.2900000000−04	1
16	1.0861602825−00	−7.9793622683−04	2.1870000000−04	1
19	1.9731445040−01	−5.7580374350−03	1.9683000000−03	1
20	8.1081171129−03	−7.9008061669−04	1.9683000000−05	1
22	1.9879439918−05	2.4845945438−05	5.9049000000−06	1
23	−2.2863927418−10	1.7699119947−10	5.9049000000−08	1
24	−1.1871166756−18	−5.0821976835−21	5.9049000000−10	1
25	5.3997749843−24	−3.9258801028−18	5.9049000000−12	1

33·2 $\alpha=2$

j	x	y	δ	*
1	1.0000000000+01	1.0000000000+01	1.0000000000−00	
2	3.0766192496−00	8.1628457830−00	1.0000000000−00	1
3	−3.0706914966−00	5.2452183091−00	1.0000000000−02	1
7	−3.1028465633−00	4.3778344326−00	2.7000000000−00	1
8	−3.0818310674−00	2.9820363511−00	2.7000000000−02	1
10	−2.7125642073−00	−9.0394672887−02	8.1000000000−03	1
12	−2.5890926428−00	1.3497608175−00	2.4300000000−03	1
15	−7.1240056258−01	−2.6409558805−00	2.1870000000−02	1
17	1.7606523311−00	2.3545662661−01	6.5609999999−03	−1
19	4.3808089593−01	1.2134148196−01	1.9683000000−03	1
21	3.0869521686−02	2.7413524466−02	5.9049000000−04	1
22	−2.7386259546−04	4.1358906651−04	5.9049000000−06	1
24	−9.7537020238−08	−1.7731971447−08	1.7714700000−06	1
25	5.5996873804−15	−1.0777457485−14	1.7714700000−08	1
26	6.9368012403−21	−1.3328154415−20	1.7714700000−10	1

33·3 $\alpha=1.0$

j	x	y	δ	*
1	4.0000000000−00	1.0000000000−00	1.0000000000−00	
2	3.0119864225−00	9.2856133686−01	1.0000000000−00	1
3	1.9650781851−00	8.4897683568−01	1.0000000000−02	1
4	1.1571589742−00	7.5476089725−01	1.0000000000−04	1
7	5.5319756720−01	6.3693966921−01	9.0000000000−04	1
9	1.0303697243−01	4.7084251866−01	2.7000000000−04	1
11	−2.5522419783−01	8.8950326201−02	8.1000000000−05	1
13	−1.0810016453−01	5.9765568557−02	2.4300000000−05	1
15	−4.1080569894−02	3.9993329204−02	7.2900000000−06	1
18	−8.6135330381−03	2.3616082714−02	6.5609999999−05	1
20	3.7895257915−03	6.0485703140−03	1.9683000000−05	1
22	−3.2365305317−04	2.7853990115−03	5.9049000000−06	1
24	2.8953734292−04	1.1837765985−04	1.7714700000−06	1
25	1.2736498698−04	8.5210959525−05	1.7714700000−08	1
28	4.4457827659−05	5.7479510022−05	1.5943230000−07	1
30	2.5741368904−06	3.0405206122−05	4.7829690000−08	1
33	−2.4676645749−06	6.3353479013−07	4.3046721000−07	1
34	−1.1738306742−06	4.6744583579−07	4.3046721000−09	1
36	−5.1977207316−07	3.3721595466−07	1.2914016300−09	1
38	−1.8565522847−07	2.2883286755−07	3.8742048900−10	1
40	−1.6168539933−08	1.2438498341−07	1.1622614670−10	1
43	1.4632994920−08	5.9062752729−09	1.0460353203−09	1
44	6.4575106197−09	4.2563536509−09	1.0460353203−11	1
46	2.2797666418−09	2.8795104731−09	3.1381059609−12	1
48	1.6481221407−10	1.5439034991−09	9.4143178826−13	1

33·4 $\alpha=2$

j	x	y	δ	*
1	2.0000000000+01	1.0000000000+01	1.0000000000−00	
2	2.8514984435+01	1.1262691246+01	1.0000000000−00	−1
3	3.9089428195+01	1.2523588889+01	1.0000000000−02	−1
5	5.2183728632+01	1.3811920266+01	3.0000000000−03	−1
8	6.8422998124+01	1.5148706006+01	2.7000000000−02	−1
10	8.8596220881+01	1.6547271272+01	8.1000000000−03	−1
13	1.1369294422+02	1.8017915170+01	7.2900000000−02	−1
15	1.4495184381+02	1.9570229244+01	2.1870000000−02	−1
17	1.8392160100+02	2.1215329715+01	6.5610000000−03	−1
20	2.3253917657+02	2.2953866868+01	5.9049000000−02	−1
22	2.9322406475+02	2.4798359000+01	1.7714700000−02	−1
25	3.6900092378+02	2.6754305209+01	1.5943230000−01	−1
27	4.6365008673+02	2.8829955269+01	4.7829690000−02	−1
29	5.8189577592+02	3.1044404335+01	1.4348907000−02	−1
32	7.2964432349+02	3.3385742563+01	1.2914016300−01	−1
34	9.1427638443+02	3.5873234131+01	3.8742048900−02	−1
37	1.1450178248+03	3.8514632460+01	3.4867844010−01	−1
39	1.4334008131+03	4.1323011132+01	1.0460353203−01	−1
42	1.7938392599+03	4.4303509521+01	9.4143178827−01	−1
44	2.2443521714+03	4.7470604267+01	2.8242953648−01	−1
46	2.8074607277+03	5.0849875294+01	8.4728860944−02	−1
49	3.5113172354+03	5.4424189590+01	7.6255974850−01	−1

Bei den Beispielen 33·1 und 33·2 schätzt man die rechte Ordnung und Näherungswurzel. Dagegen ist die Ordnung bei 33·3 nicht richtig. In 33.4 genügt der Anfangswert der Bedingung (6) nicht.

34 $e^z(z+10+10i)z^2=0$

34·1 $\alpha=2$

j	x	y	δ	*
1	1.0000000000−00	1.0000000000−00	1.0000000000−00	
2	7.0638914809−01	6.9488182706−01	1.0000000000−00	1
3	6.0439172186−02	6.2474359616−02	1.0000000000−02	1
4	1.0123352760−02	3.5115340539−03	1.0000000000−04	1
6	1.4979185039−04	2.7600977724−04	3.0000000000−05	1
7	−4.7359260513−08	−2.5335870291−08	3.0000000000−07	1
8	−1.8683513937−14	2.2003286779−14	3.0000000000−09	1
9	−5.6049189620−20	6.5943148625−20	3.0000000000−11	1

34·2 $\alpha=2$

j	x	y	δ	*
1	4.0000000000−00	1.0000000000−00	1.0000000000−00	
2	3.7334626737−00	1.3165543125−00	1.0000000000−00	1
3	1.7384297660−00	1.3392767000−00	1.0000000000−02	1
5	−9.7368750372−02	1.0259665947−00	3.0000000000−03	1
7	−2.0702582198−00	1.8026051722−00	9.0000000000−04	1
9	−3.1717903534−02	1.6773207589−00	2.7000000000−04	−1
12	−1.9928210318−00	1.7191936286−00	2.4300000000−03	1
14	5.1975366612−02	1.5506727555−00	7.2900000000−04	−1
16	−1.7861077117−00	1.4606746321−00	2.1870000000−04	1
19	2.3298763897−01	9.8604261529−01	1.9683000000−03	−1
21	−1.1759504337−00	5.9397896775−01	5.9049000000−04	1
23	−1.1419687904−00	5.1891238097−01	1.7714700000−04	1
25	−1.0505547753−00	5.6557387765−01	5.3144100000−05	1
28	−1.0267228349−00	4.6843753305−01	4.7829690000−04	1
30	−8.9943426665−01	4.8035524171−01	1.4348907000−04	1
32	−8.6166749948−01	3.7252223618−01	4.3046721000−05	1
35	−7.2638504426−01	4.3543599769−01	3.8742048900−04	1
37	−6.9732102762−01	3.0437437096−01	1.1622614670−04	1
39	−5.1092156833−01	3.1233930798−01	3.4867844010−05	1
42	−4.5851018352−01	1.6733800057−01	3.1381059609−04	1
44	−2.8649320348−01	2.6175507206−01	9.4143178826−05	1
47	−2.5106287348−01	9.8600014805−02	8.4728860943−04	1
49	−7.3580551027−02	7.9244072719−02	2.5418658283−04	1
51	−2.8752928824−02	1.2956600194−03	7.6255974849−05	1
53	−4.3469091224−06	3.8324445623−03	2.2876792455−05	1
57	−1.3056377141−04	−1.0859061804−02	6.1767339627−03	1
59	−1.1154981112−04	−4.9992319135−03	1.8530201888−03	1
61	−3.4805429510−05	−5.8024354946−04	5.5590605665−04	1
62	−5.2694999786−07	−2.9205660574−06	5.5590605665−06	1
63	−1.3905961452−11	−2.5297354489−11	5.5590605665−08	1
64	−4.8556163701−19	−1.7504465251−18	5.5590605665−10	1

34·3 $\alpha=2$

j	x	y	δ	*
1	2.0000000000+01	1.0000000000+01	1.0000000000−00	
2	1.9733823672+01	1.0316322637+01	1.0000000000−00	1
3	1.7733840410+01	1.0316327876+01	1.0000000000−02	1
5	1.5733841993+01	1.0316327471+01	3.0000000000−03	1
7	1.7733841772+01	1.0316430772+01	9.0000000000−04	−1
9	1.5733841873+01	1.0316580483+01	2.7000000000−04	1
12	1.7733840806+01	1.0316574322+01	2.4300000000−03	−1
14	1.5733841014+01	1.0316423721+01	7.2900000000−04	1
16	1.7733840290+01	1.0317640698+01	2.1870000000−04	−1
19	1.5733841040+01	1.0317620979+01	1.9683000000−03	1
21	1.7733840893+01	1.0317881819+01	5.9049000000−04	−1
24	1.5733845685+01	1.0317883880+01	5.3144099999−03	1
26	1.7733845158+01	1.0317898192+01	1.5943230000−03	−1
28	1.5733845323+01	1.0317691460+01	4.7829689999−04	1
31	1.7733842149+01	1.0317691460+01	4.3046720999−03	−1
33	1.5733842525+01	1.0317658739+01	1.2914016300−03	1
35	1.7733842351+01	1.0317998069+01	3.8742048900−04	−1
38	1.5733844455+01	1.0317995376+01	3.4867844009−03	1
40	1.7733844209+01	1.0318028624+01	1.0460353203−03	−1
42	1.5733844679+01	1.0317068122+01	3.1381059608−04	1
45	1.7733843277+01	1.0317063106+01	2.8242953647−03	−1
47	1.5733843455+01	1.0316926282+01	8.4728860942−04	1
49	1.7733843267+01	1.0317489342+01	2.5418658283−04	−1

Bei 34·1 und 34·2 konvergiert z_j zu der Wurzel $z=0$, aber bei 34·3 doch nicht. Dieser Anfangswert genügt (6) nicht.

Diese Rechnungen wurden auf der HIPAC–103–Rechenanlage des Institüts für Statistische Mathematik mit einem "FORTRAN (HARP)" durchgeführt. Diese Programm findet man in dem Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics 1964.

5. Bemerkungen

Offenbar, wenn wir keine Näherungswurzel haben, die (6) genügt, so können wir diese Methode nicht gebrauchen. Aber wenn die gegebene Funktion von Polynom n^{ter} Ordnung ist, dann hat sie n_1 Wurzeln in dem Einheitskreis* (mit Halbsmesser 1 und Mittelpunkt 0) und die anderen $n_2 = n - n_1$ Wurzeln in dem Gebiet außer diesem Kreis. Von der Transformation $z: =1/z$ werden die anderen n_2 Wurzeln in diesen Kreis hineingekommen. Demnach ist es schon genug, daß wir nur die liegende Wurzeln in diesem Kreis diskutieren. Wir können diesen Kreis so teilen, daß jeder Unterteil einige Wurzeln enthält oder gar nicht, und den die Wurzeln enthaltenden Teil verteilen wir weiter und weiter in kleineren Teile, in denen einige Wurzeln liegen, während in anderen Teil keine liegt. Zum Schluß erhalten wir die Näherungswurzel, die (6) genügt. Das ist eine Methode, womit man die Näherungswurzel erhalten kann. Es könnte auch andere bessere Methode geben.

Dagegen bei den beliebigen Gleichungen beobachten wir die folgende Erscheinung. Daß das Argument gleich Null ist, bedeutet doch nicht, daß es in jedem Gebiet G keine Wurzeln gibt, sondern daß die Summe von den Ordnungen der Wurzeln gleich der Summe von den der Polen ist. Also gibt es keine Methode für beliebige Gleichungen zu beweisen, ob sie der Bedingung (6) genügt oder nicht.

INSTITUT FÜR STATISTISCHE MATHEMATIK

---

*) Wenn diese Grenze des Kreises die Wurzel enthält (genau oder asymptotisch), erhält man ein halb (genau oder asymptotisch) die Ordnung dieser Wurzel. In diesem Fall behandeln wir einen etwas grösseren oder kleineren Kreis.