

# 通信路容量と確率測度の最適化 最適な変調方式のために

Channel Capacity and Optimization of Probability Measure  
Toward Optimal Modulation Design

池田思朗 Shiro IKEDA



**アブストラクト** 通信路容量は、情報理論、通信理論において重要な役割を持つ量である。また、その通信路容量を達成する入力の確率分布は最適な変調方式を与えるため、実用上も重要である。本稿では、連続値を入力とする通信路について、通信路容量とそれを達成する入力の分布について考察する。入力が連続値を取り得る場合、一見すると連続な測度を持つ分布が最適となりそうだが、実際には多くの通信路と入力の制約のもとで、離散値のみを取る離散測度が通信路容量を達成する入力の分布となることが知られている。このような研究は 1970 年代に始まり様々な通信路に対する考察がなされてきたが、国内ではほとんど研究されていない。本稿では既知の事実を証明の概要とともに示し、通信工学への応用について考える。  
キーワード 通信路容量, AWGN 通信路, 最大パワー制約, 変調方式

## 1. はじめに

本稿では情報理論、通信理論の基本的な量である通信路容量とそれを達成する通信路への入力の確率分布に関し、情報理論で得られている幾つかの研究成果を解説する。通信路は記憶のない次元の AWGN (Additive White Gaussian Noise) 通信路を用いて説明する。簡単な問題だが、余り国内では知られていない興味深い結果が存在する。

また、通信路容量を達成する入力の確率分布を再現する変調方式を用いれば、達成可能な伝送レートが通信路容量となる。すなわち、最適な変調方式が存在することになる。このような観点から変調方式と通信路容量との関係についても考える。

## 2. 情報理論の結果

### 2.1 通信路容量: 有限アルファベットから連続値へ

以下では通信路への入力は  $X$ , 出力は  $Y$  とする (図 1)。送信側は各時刻で  $X$  を送り、受信側は同期して  $Y$  を受け取る。通信路は記憶を持たないとする。

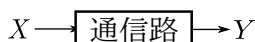


図 1 雑音のある通信路と入出力の関係

まず、入力と出力が有限個のアルファベット  $x_1, \dots, x_K, y_1, \dots, y_J$  の場合を考えよう。通信路は  $p(y_j|x_k)$  という行列の形で与えられる。入力  $X$  の確率分布を  $\rho$  と書けば、通信路容量は次の最大値として定義される<sup>(1)</sup>。

$$C = \max_{\rho} I(X; Y)$$

$I(X; Y)$  は相互情報量であり、定義は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \sum_k \rho(x_k) i(x_k; \rho) \\ i(x_k; \rho) &= \sum_j p(y_j|x_k) \log_2 \frac{p(y_j|x_k)}{p_{\rho}(y_j)} \\ p_{\rho}(y_j) &= \sum_k \rho(x_k) p(y_j|x_k). \end{aligned} \quad (1)$$

ここで  $i(x_k; \rho)$  は  $p(y|x_k)$  から  $p_{\rho}(y)$  への KL (Kullback-Leibler) 情報量であり、非負である。この最適化問題を解く方法は有本のアルゴリズムとしてよく知られている<sup>(2)</sup>。結果として通信路容量  $C$  [bit/channel use] とそれを達成する入力分布  $\rho$  が得られる。この  $\rho$  に従うように情報を送信すれば、達成可能な伝送レートは  $C$  となる。したがって、通信路容量を達成する入力分布  $\rho$  は最も良い変調方式を与えることになる。最適な入力の分布を  $\rho_0$  と置くと、次式が成り立つ<sup>(2)(3)</sup>。

$$i(x_k; \rho_0) = C \quad (k = 1, \dots, K). \quad (2)$$

この式はどのシンボル  $x_k$  を用いても送ることのできる情報量の期待値は同じだということを示している。なお、通信路容量を達成する入力分布の中で最小のアルファベット数を持つものを考えると  $K \leq J$  を満たすことが知られている (文献 (4) の §4.5, Corollary 3)。

次に、実際の通信システムを考える。多くの通信システムの物理層は連続値を入力とする通信路とみなせる。そこで、有

池田思朗 正員 統計数理研究所  
E-mail shiro@ism.ac.jp  
Shiro IKEDA, Member (The Institute of Statistical Mathematics, Tachikawa-shi, 190-8562 Japan).  
電子情報通信学会 基礎・境界サイエンス  
Fundamentals Review Vol.5 No.3 pp.230-238 2012 年 1 月  
©電子情報通信学会 2012

限アルファベットを入出力とする通信路に対する定義を連続値の入出力へ拡張しよう。簡単のため、 $X$  及び  $Y$  は一次元の実数値をとるとし、AWGN 通信路を考える。通信路  $p(y|x)$  は  $Y$  に関する確率密度関数として定義される。

$$Y = X + \sigma N, \quad N \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (3)$$

$$p(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right].$$

入力  $X$  は実数値をとるが、その分布  $\rho$  は連続分布となることも離散分布となることも考えられる。このことを考慮に入れ、相互情報量を以下のように定義する。

$$I(X; Y) = \mathbb{E}_\rho [i(x; \rho)]$$

$$i(x; \rho) = \int_{\mathbb{R}} p(y|x) \log_2 \frac{p(y|x)}{p_\rho(y)} dy.$$

$i(x; \rho)$  は式 (1) の定義を連続の  $Y$  に拡張したものであり  $p(y|x)$  から  $p_\rho(y)$  への KL 情報量である。また、 $\mathbb{E}_\rho[\cdot]$  は  $\rho$  によって期待値をとることを示す。 $\rho$  が  $x$  の連続分布ならば

$$\mathbb{E}_\rho[f(x)] = \int_{\mathbb{R}} \rho(x) f(x) dx$$

であり、離散分布ならば確率の定義された点を  $x_i$  として

$$\mathbb{E}_\rho[f(x)] = \sum_i \rho(x_i) f(x_i)$$

となる。 $p_\rho(y)$  を以下のとおりに定義する。

$$p_\rho(y) = \mathbb{E}_\rho[p(y|x)].$$

通信路容量  $C$  としては相互情報量  $I(X; Y)$  を最大にする入力分布  $\rho$  を求めればよいのだが、 $X$  に関する全ての確率分布を考慮するのは意味がない。例えば、 $X$  を無限に増幅すれば式 (3) において雑音  $N$  は無視できるため、通信路容量を無限大とする入力分布を構成できるが、平均パワーが発散しており、現実的でない。このような場合を除くため、 $\rho$  は、 $X$  に関してある種の制約を満たす分布の集合  $\mathcal{P}$  の中から最適なものを選ぶのが適当である。すなわち、通信路容量は以下の上界として定義される。

$$C = \sup_{\rho \in \mathcal{P}} I(X; Y). \quad (4)$$

この問題では、前の有限アルファベットの場合と異なり、 $\rho$  という  $X$  の関数、すなわち確率測度の最適化を行うことになる。確率測度の最適化は確率分布の最適化と比べて難しいと考えられる。

## 2.2 Shannon の結果と Smith の結果

連続値の入出力を持つ AWGN 通信路の通信路容量として最も有名なものは Shannon の結果だろう<sup>(1)</sup>。 $X$  のパワー、すなわち  $X^2$  の期待値を有限値以下とする分布の中で式 (4) に従って相互情報量を最大にするものを求める。信号のパワーを  $S$  以下

に制限する場合、 $\mathcal{P}$  は以下の  $\mathcal{P}_{\text{AP}}$  (average power constraint, 平均パワー制約) と定義できる。

$$\mathcal{P}_{\text{AP}} = \left\{ \rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid \mathbb{E}_\rho[x^2] \leq S, \mathbb{E}_\rho[1] = 1 \right\}.$$

ここで  $\mathbb{R}_+$  は非負の実数の集合である。また、 $\mathbb{E}_\rho[1] = 1$  は  $\rho(x)$  が確率分布となるための条件である。条件  $\rho \in \mathcal{P}_{\text{AP}}$  のもとで AWGN 通信路の通信路容量を求めると、

$$C = \sup_{\rho \in \mathcal{P}_{\text{AP}}} I(X; Y)$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{S}{\sigma^2} \right) = \frac{1}{2} \log_2(1 + \text{SNR}).$$

式中の  $\text{SNR}$  (Signal to Noise Ratio, SN 比) は信号の平均パワー  $S$  と雑音のパワーの期待値  $\sigma^2$  との比である。また、通信路容量を達成する入力分布  $\rho(x)$  は雑音の分散  $\sigma^2$  によらず、平均が 0、分散が  $S$  である正規分布、つまり  $\mathbb{R}$  上で連続な密度関数となる。この有名な結果は情報理論や通信工学を学ぶ過程で一度は目にするものである。

以上の結果から一次元 AWGN 通信路に対しては入力为正規分布型の確率密度関数を持つ変調方式を用いれば、達成可能な伝送レートは通信路容量となる。すなわち、最適な変調方式となる。しかし、このような変調方式は実現不可能である。現実の送信システムは、増幅器に限界があるため、送信信号の絶対値には上限がある。一方、正規分布は、低い確率ではあっても絶対値の非常に大きい値をとることがある<sup>(注1)</sup>。

現実的な制約のもとで、AWGN 通信路の通信路容量を考えよう。実際には  $X$  の最大値には限界がある。入力  $X$  の最大値が制限されている場合、入力分布の集合  $\mathcal{P}$  として次の  $\mathcal{P}_{\text{PP}}$  (peak power constraint, 最大パワー制約) を考えるのが適当だろう。

$$\mathcal{P}_{\text{PP}} = \left\{ \rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid \rho(x) = 0 \text{ for } |x| > a, \mathbb{E}_\rho[1] = 1 \right\}.$$

$\mathcal{P}_{\text{PP}}$  は有限区間を台とする全ての確率測度を含む集合である。 $\mathcal{P}_{\text{PP}}$  のもとでの通信路容量について最初に調べたのは Smith である<sup>(注2)(5)</sup>。Shannon の結果から類推するならば最適な変調方式が連続分布となりそうだが、そうはならない。通信路容量を達成する入力分布は、連続測度を持つ分布ではなく、有限個の点からなる離散測度となる。

$\mathcal{P}_{\text{PP}}$  のもとで最適となる入力分布を図 2 に示す。AWGN 通信路の雑音の分散を幾つか変化させ、通信路容量を達成する入力分布を図示した。最適な入力分布は常に二つ以上の点からなる離散分布であり、定義されている台の両端に必ず点を持つ。更に、雑音の大きい場合には 2 点の分布、雑音が小さくなればより多くの点を用いる。これは直感的に納得できる結果であり、雑音の分散によらず同じ分布が最適になる Shannon の結果とは異なる。もちろん、こうして求めた通信路容量は対応する Shannon の通信路容量  $(1/2) \log_2(1 + \text{SNR})$  より小さい。Shannon の問題設定よりも制約が強いから当然である。

(注1): デジタル通信では連続値への符号化が難しいことも理由の一つである。

(注2): 正確には Smith は最大パワーと平均パワーを同時に考えたが、ここでは最大パワーだけに注目する。主たる理論的な結果は同じである。

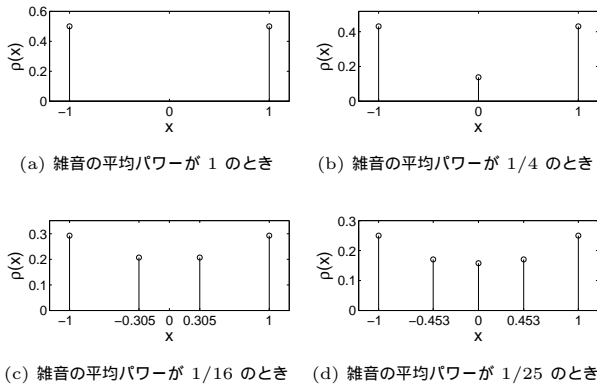


図2 AWGN 通信路において入力 の最大値を 1 に制限し、雑音の平均パワーを変化させたときの通信路容量を達成する入力分布の変化

なお、Smith が理論的に示したのは「最適な分布が有限個の点からなる離散分布だ」ということであり、最適な入力分布の点の個数、位置、それぞれの確率、そして通信路容量は解析的には求まらない。図に示した分布は Smith の論文と同様に数値的に計算した。計算法については後に述べる。

### 2.3 Smith の結果の意味とその後の研究

Shannon の示した通信路容量は、平均パワー制約を受けている送信システムが AWGN 通信路を通して伝送できるレートの上界である。しかし、実現可能なシステムは、平均パワーだけでなく送信信号の最大値が有限値に制約されているため、 $(1/2) \log_2(1 + SNR)$  は到底達成できない値である。Smith の結果は、最大出力制約のもとでの通信路容量、すなわち達成可能な伝送レートを示し、同時にそれを達成する変調方式は離散分布、すなわち工学的に実現できることを証明している。

Smith によってこの結果が示された後、他の通信路、あるいは制約のもとでの通信路容量とそれを達成する入力の分布について、多くの研究がなされている。以下にその一部を挙げる。

Shamai(Shitz) らはデジタル変調と同様の AWGN 複素通信路で入力の台を制約したものを<sup>(6)</sup>を考え、通信路容量を達成する入力の分布が原点を中心とする複数の同心円状の分布となることを示した(原点も半径 0 の円と考える)。これも振幅方向には有限個の離散点からなる分布が最適となる。また、Tchamkerten は Smith と同様に入力の台を制約した次元の一般的な加法的雑音を持つ通信路を調べ、通信路容量を達成する分布が有限個の点からなる離散分布となるために雑音の確率密度関数を持つ十分条件を示した<sup>(7)</sup>。

入力分布の台を有限に制限するのは現実的だが、出力が実数全体であるのに対し強い制約であるともいえる。これに対し、実数全体を入力の変域とし、平均パワーと高次の統計量の期待値を制約した場合についても通信路の容量とそれを達成する分布が調べられている。特にフェージング通信路に関して幾つかの結果が示されている<sup>(8)-(10)</sup>。これらも前の結果と同様に次元ならば有限個の離散点からなる分布が、次元以上ならば原

点を中心とする有限個の同心円の分布が最適になることが示されている。また、変わったものではポアソン分布に従う通信路に関する結果もある<sup>(11)</sup>。受信側は例えば光子の個数を観測するような場合を考えればよいだろう。光子の数の期待値を入力  $X$  とし、ポアソン分布に従う出力  $Y$  を考える。 $Y$  は非負の整数全体を取るため、有限アルファベットとはならない。この場合でも入力  $X$  の台がある有限区間に限られているときには通信路容量を達成する分布は有限個の点からなる離散分布となる。Chan らの論文では一般の多次元正規分布の雑音を持つ通信路に関する結果とともに、これまでの研究の概要がよくまとめられている<sup>(12)(注3)</sup>。

様々な研究者によって行われた研究成果を調べると、多くの通信路と入力に関する制約のもとで、通信路容量を達成する入力の分布は何らかの意味で離散分布となることが示されている。証明を詳細に見ると、連続分布が最適となる通信路と制約との組合せを探す方が大変である。特に  $Y$  が実数値をとる次元の通信路で、連続分布が最適となる通信路と入力の制約の組合せが明示的に示されているものは、AWGN 通信路において平均パワー制約を課した Shannon の結果のみである。

### 2.4 Smith の証明の手続き

以上で示した興味深い結果は、情報理論の教科書には示されていないように見える。どのように証明するかについても知らない読者が多いだろう。ここでは次元 AWGN 通信路に対して Smith が 1971 に与えた証明の概略を紹介する<sup>(注4)</sup>。以下は数学的に厳密ではない。厳密なものは他の文献を参照されたい<sup>(5)(13)(14)</sup>。

まず、通信路を固定したとき相互情報量  $I(X; Y)$  は  $\rho(x)$  の汎関数であることから  $I(\rho)$  と書くことにする。通信路容量  $C$  は確率測度  $\rho$  を変数とした最適化問題の上界として定義される。

$$C = \sup_{\rho \in \mathcal{P}} I(\rho). \quad (5)$$

$\rho$  の汎関数としてみると、相互情報量  $I(\rho)$  は  $\rho$  に関して一般に上に凸 (concave) である。

次元変数  $X$  の最大値が制限されている  $\mathcal{P}_{PP}$  の問題を考えよう。このとき AWGN 通信路において雑音の分散が 0 より十分に大きい正の値を持つならば  $I(\rho)$  は有界である。また、詳細は省くが、 $\mathcal{P}_{PP}$  から構成される累積分布関数の集合は Levy 距離のもとで弱コンパクト (weak\* compact<sup>(注5)</sup>) であることが示せる<sup>(5)(15)</sup>。この結果、 $\mathcal{P}_{PP}$  上で次元 AWGN 通信路の通信路容量を求める問題では  $\rho \in \mathcal{P}_{PP}$  に対して最大値が存在し、sup を max で置き換えることができる。式 (5) は以下の問題となる。

$$C = \max_{\rho \in \mathcal{P}_{PP}} I(\rho).$$

(注3): 筆者も神経細胞のスパイク列を用いた通信路を考え、入力の台を制限した場合の通信路容量の問題を考えた<sup>(13)</sup>。

(注4): 1969 年に同様の内容が博士論文として提出されている。

(注5): weak\* という表現は関数解析で用いられる。Smith<sup>(5)</sup>がこの表現を用いており、関連する論文も同様の表現を用いているため、ここでも同じ表記を用いる。

AWGN の場合は  $\rho$  の汎関数  $I(\rho)$  が厳密に上に凸となるため、通信路容量を与える入力分布が唯一存在することも分かる。

$\rho_0 \in \mathcal{P}_{PP}$  を  $I(\rho)$  の最大値を与える入力分布とすると、以下の方向微分 (ガトー微分) は全ての  $\rho \in \mathcal{P}_{PP}$  に対して 0 以下になる。

$$I'_{\rho_0}(\rho) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{I((1-\eta)\rho_0 + \eta\rho) - I(\rho_0)}{\eta} \leq 0, \\ \forall \rho \in \mathcal{P}_{PP}.$$

$I'_{\rho_0}(\rho)$  は一般に以下のような形をしている。

$$I'_{\rho_0}(\rho) = \mathbb{E}_{\rho_0}[i(x; \rho_0)] - C.$$

$C$  は通信路容量である。 $C = \mathbb{E}_{\rho_0}[i(x; \rho_0)] = I(\rho_0)$  であること、及び全ての  $\rho \in \mathcal{P}_{PP}$  に対して

$$\mathbb{E}_{\rho}[i(x; \rho_0)] \leq C$$

であることに注意すると、次の関係が示される。

$$i(x; \rho_0) \begin{cases} = C & x \in E_0 \\ \leq C & x \notin E_0 \end{cases} \quad (6)$$

ただし  $E_0$  は  $\rho_0$  が正となる  $\mathbb{R}$  の点の集合である。密度分布であれば密度が正の点。離散分布ならば確率の定義されている点である。これは有限アルファベットの入出力を持つ通信路の最適な入力分布に関する式 (2) と対応している。

式 (6) で重要なのは  $C$  の値ではない。通信路容量を与える  $\rho_0$  を用いて  $i(x; \rho_0)$  を計算すると、 $X$  の確率測度が定義されている点において定数にならなければいけないことが重要である。

次に  $i(x; \rho_0)$  の  $x$  の定義域を複素数  $z \in \mathbb{C}$  に拡張し、 $i(z; \rho_0)$  が正則となる  $z$  の領域を求める。求める領域は実数軸上の線分  $\mathcal{X} = \{z \in \mathbb{R}, |z| \leq a\}$  を含んでいる。

今、 $\rho_0$  が正となる点、すなわち  $E_0 \subseteq \mathcal{X}$  に属する点が無限個あると仮定する。式 (6) からその全ての点で  $i(z; \rho_0) = C$  である。実軸上の閉区間  $\mathcal{X}$  は  $\mathbb{C}$  のコンパクトな部分領域であり、その中の無限個の点において正則な関数  $i(z; \rho_0)$  が定数であると仮定されたことになる。コンパクトな領域で無限個の点があるならば、必ず収束する点列を含む。すると複素関数論の一致の定理を用いることができる。その結果  $i(z; \rho_0)$  は、この関数が正則となる領域の全ての点において  $i(z; \rho_0) = C$  を満たすことになる。

一次元の AWGN 通信路では  $i(z; \rho_0)$  は実軸を含む領域で正則である。すなわち  $E_0$  が無限個の点を含むとすると、 $i(z; \rho_0)$  が実軸上全ての点で定数とならなければいけない。Smith はどのような  $\rho_0 \in \mathcal{P}_{PP}$  を用いても実数軸の全ての点で  $i(z; \rho_0)$  を定数とはできないことを示し、その結果  $E_0$  が有限個の孤立点しか持たないことを導いた。したがって  $\rho_0$  は有限個の点からなる離散分布であることが示された。

Smith の結果以降、様々な通信路と制約のもとで通信路容量を達成する分布が調べられてきた<sup>(6)-(14)</sup>。いずれの証明も基本的に上に示した Smith と同じ手続きを用いている<sup>(注6)</sup>。

(注6): 平均パワーや高次統計量の期待値に関する制約があると、式 (6) の形は多少異なる。しかし一致の定理を用いる証明の手順は同じである。

この証明は一致の定理を使う点に特徴がある。一次元の通信路に対しては、一致の定理に基づいて  $E_0$  が有限個の孤立点の集合であるという結果を導き、通信路容量を達成する入力分布が有限個の点からなる離散分布となることが示せる。一方、多次元の場合の一致の定理では、一次元の場合のようなはっきりとした結果がでない。 $N$  次元のベクトル通信路に対して一致の定理を用いると、 $E_0$  が  $N$  次元的な広がりを持たないことを示すことができる。しかし、それが単に  $N$  より低い次元の分布なのか、0 次元の点からなる分布なのかを明らかにすることは難しい。これまで考えられてきた多次元通信路の問題の多くは、通信路及び入力制約が円対称である。その場合には、半径方向の分布のみを考えればよいから、本質的に一次元の分布の問題となる。

## 2.5 通信路容量を達成する入力分布を求める方法

Smith の手続きに従って通信路容量を達成する分布が有限個の点からなる離散分布だと示されたとしても、その離散分布の点の個数、位置、確率、そして通信路容量は解析的には求まらない。したがって数値的に計算することになる。有本のアルゴリズム<sup>(2)</sup>は点の数と位置が分かっている、各点の確率のみを求めるときには用いることができるが、今の問題では点の位置が分かっていないため、工夫が必要である。

数値的に最適な分布を求める方法を以下に示す。ここでは分布の点の個数を  $n$  とし、それぞれの  $X$  の値を  $x_1, \dots, x_n$ 、確率を  $\rho_1, \dots, \rho_n$  とする。また、 $X$  の絶対値の最大値を  $a$  とする。

- (1) 点の個数  $n$  を 2 に初期化する。
- (2) それぞれの点の位置  $x_j$  と対応する確率  $\rho_j$  が制約を満たすように初期化する。

$$-a \leq x_1 < \dots < x_n \leq a, \\ \sum_{j=1}^n \rho_j = 1, \quad \rho_j > 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

- (3)  $\{x_i\}$  と  $\{\rho_i\}$  について  $I(\rho)$  を最急降下法を用いて最大化する。
- (4) 収束したならば  $-a \leq x \leq a$  に対して式 (6) が成り立つかを調べる。成り立つならばその分布が通信路容量を達成する。
- (5) もし式 (6) が成り立たないならば、点の個数  $n$  を一つ増やし、手順 (2) へ戻る。

同様の方法は他の文献でも用いられている<sup>(5)(8)(10)(13)</sup>。

手順 (3) と (4) に関する注意点を述べる。

手順 (3) の部分では点の数を仮定し、相互情報量を最大化する。一般に相互情報量は入力分布に関して上に凸であるから、理論的には収束性の問題はない。しかし、数値的には注意が必要である。最急降下法を行うには、相互情報量の評価が必要となる。一般に解析的に計算できないため数値的な評価が必要となる。この精度が十分に高くないと最急降下法が不安定になる。

手順 (4) では  $-a \leq x \leq a$  の各点で  $i(x; \rho_0)$  で示される KL 情報量と  $C = I(\rho_0)$  との関係が式 (6) を満たすか確かめる必要

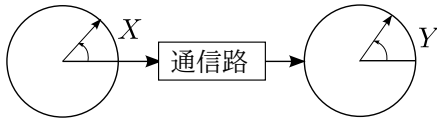


図 3 位相を入出力とする通信路

がある． $-a \leq x \leq a$  の全ての点でこのことを調べることはできないので，離散個の代表点で調べることになる．十分な細かさで調べる必要がある．

なお，一次元 AWGN 通信路の場合には正負で点の位置が対称になり，対応する点では同じ確率となること， $-a$  と  $a$  の位置に必ず点があることは簡単な考察から分かる．これらを考慮に入れば比較的簡単に最適な分布を求めることができる．

## 2.6 補 足

通信路容量は通信路と入力に課せられた制約との組合せによって定まるものである．通信路の出力，すなわち受信信号が実数全体になるような通信路において，最適な入力分布が連続分布となるものを見つけるのは難しい．ここでは入出力が円周上に値を持つ，すなわち位相の情報のみを持つ通信路において，連続分布が通信路容量を与えることを説明する．

通信路への入出力  $X, Y$  を  $[0, 2\pi)$  の位相とする． $Y$  は  $X$  から雑音の分だけずれるが，雑音は  $X$  の位置によらないとする．すなわち  $Y - X$  の分布は常に同じ分布に従うとする．このとき，通信路容量を達成する入力  $X$  の分布  $\rho_0$  は  $[0, 2\pi)$  の一様分布となる．これは式 (6) を考えると理解ができる． $Y - X$  の分布が  $X$  によらないならば， $X$  の分布として一様分布をとると  $p_{\rho_0}(y)$  も  $[0, 2\pi)$  の一様分布になる．したがって，

$$\begin{aligned} i(x; \rho_0) &= \int_0^{2\pi} p(y|x) \log_2 \frac{p(y|x)}{p_{\rho_0}(y)} dy \\ &= \log_2 2\pi - H(Y|x). \end{aligned}$$

仮定から  $H(Y|x)$  が  $x$  の値によらずに定数となるので， $i(x; \rho_0)$  は定数となる．

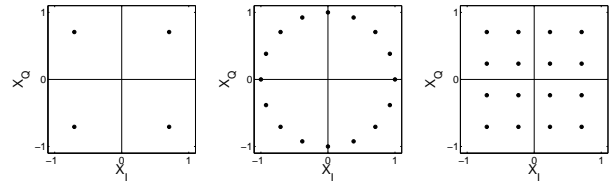
これは例えば後述する  $n$ PSK (Phase Shift Keying, 位相偏位) 変調の上界を与える通信路容量となる．

## 3. 変調方式と通信路容量

本章では，これまで解説した通信路容量の問題とデジタル通信における変調方式の問題との関係を考える．

実際の通信システムで広く用いられている変調方式には，PSK 変調，QAM (Quadrature Amplitude Modulation, 直交振幅) 変調などがある．これらのうち，どの変調方式を用いるかは通信システムを設計する上で重要である．また，携帯電話などの通信システムでは，通信路状況に応じて変調方式を切り換える適応変調を用いている<sup>(16)</sup>．例えば PSK と QAM との切り換えは伝送レートを上げるために用いる基本的な技術である．

これらの変調方式の達成可能な伝送レートをそれぞれ比較し，更に通信路容量とを比較することは，適応変調を行う際の指針



(a) QPSK の信号点配置 (b) 16PSK の信号点配置 (c) 16QAM の信号点配置

図 4 代表的な変調方式の信号点配置

としても重要である．本章では，AWGN 複素通信路を仮定し，最大出力制約下での通信路容量とそれを達成する入力分布を計算し， $n$ PSK,  $n$ QAM によって達成可能なレートとの関係を調べることにより，適応変調への指針を与える．

## 3.1 AWGN 通信路と最大パワー制約

通信で用いる変調方式では，複素通信路を考えるのが一般的である．雑音には正規雑音を仮定する．以下では次式に示す AWGN 複素通信路を考える．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_I \\ Y_Q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_I \\ X_Q \end{pmatrix} + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N_I \\ N_Q \end{pmatrix}, \\ N_I, N_Q &\sim \mathcal{N}(0, 1), \end{aligned} \quad (7)$$

ここで添字  $I, Q$  はそれぞれ同相成分，直交位相成分を表すものとする．

平均パワー  $\mathbb{E}_\rho[X_I^2 + X_Q^2]$  を  $S$  以下に制約した場合，式 (7) に示した AWGN 複素通信路の通信路容量は  $\log_2(1 + SNR)$ ， $SNR = S/\sigma^2$  となり，通信路容量を達成する最適な入力分布は  $X_I, X_Q \sim \mathcal{N}(0, S/2)$  となる．

デジタル通信の変調方式では一般に複素平面上に複数の信号点を配置し，それぞれを入力に応じて選び，送信する．以下では各信号点が無記憶に等確率で選ばれる入力を考えることにする．変調方式を定める際の重要な問題は信号点の配置である．広く用いられている信号点配置は  $n$ PSK や  $n$ QAM である．代表的な変調方式の信号点配置を図 4 に示した．図 5 では式 (7) の AWGN 複素通信路において QPSK, 16PSK, 16QAM の達成可能な通信レートを平均パワー制約のもとでの通信路容量  $\log_2(1 + SNR)$  と比較している．横軸には  $SNR$  をとってある．このグラフからは 16QAM の信号点配置が通信路容量に最

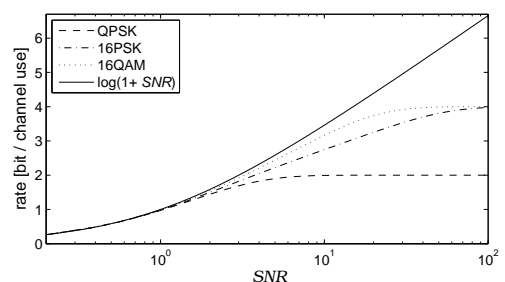


図 5 平均パワー制約下での通信路容量と QPSK, 16PSK, 16QAM の達成可能伝送レートの比較

も近いレートを与えるように見える．すると平均パワー制約下の AWGN 通信路において QPSK, 16PSK, 16QAM が利用可能な適応変調では, SNR によらず常に 16QAM を選択すべきであることになってしまう．

この比較は適切ではない．適応変調を用いるシステムでは, 変調方式を変えても, 同じ増幅器を用いて信号を増幅し, 送信しているはずである．したがって PSK と 16QAM とで同じ平均パワーを仮定するのではなく, 同じ最大パワーを仮定する方が自然である．しかし, それぞれの SNR を揃えると, 16QAM の信号点配置の最大パワーは PSK のその 9/5 倍になってしまう．

また, 最大パワー制約のもとでは図中の通信路容量  $\log_2(1 + SNR)$  は意味を無さない．入力分布の台が制限されている状況では入力分布が正規分布とはなり得ないからである．

以下では, 二つの自然な形の最大パワー制約を考える． $X_I^2, X_Q^2 \leq E_{\max}/2$  のようにそれぞれの成分を制約するボックス制約と, 全体の出力を  $X_I^2 + X_Q^2 \leq E_{\max}$  のように制約する円制約である．これらの二つの場合について, 通信路容量とそれを達成する入力分布について説明する． $n$ PSK,  $n$ QAM といった変調方式が通信路容量に近い伝送レートを達成できることを示す．

以下では, 最大パワー制約下での信号の最大パワーと雑音の強度比を  $pSNR = E_{\max}/\sigma^2$  と書くことにし, それぞれの制約のもとでの通信路容量について調べる．

### 3.2 ボックス制約

ボックス制約下では,  $I, Q$  成分はそれぞれ独立な最大パワー制約と独立な正規雑音を受ける．したがって通信路容量を求めるには  $X_I$  と  $X_Q$  に関して独立に最大パワー制約下での一次元の AWGN 通信路を考えればよい．

これまで見てきたように, 最大パワー制約下での一次元の AWGN 通信路の通信路容量は有限個の孤立点からなる分布によって達成される．2.5 の方法に従って最適な入力分布を数値的に計算した．なお, KL 情報量の評価には Gauss-Hermite 積分を用いた．結果を図 6 に示す．図では横軸に  $pSNR$  をとり, 対応する最適な分布の点の位置を表示してある．最適な分布は  $pSNR$  が大きくなるにつれて点の数が増えるが, 常に 0 を中心

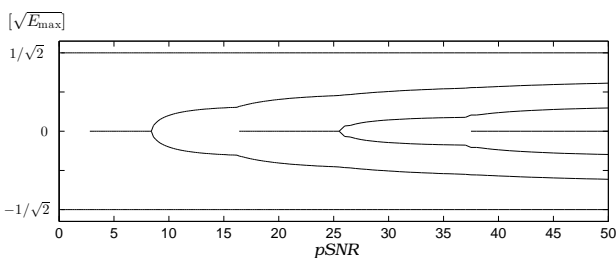
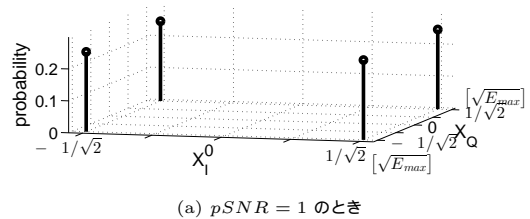
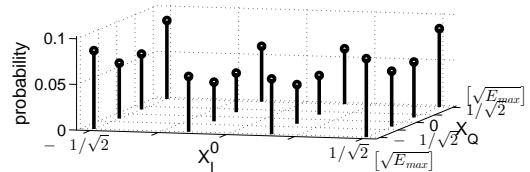


図 6 一次元 AWGN 通信路における最大パワー制約下の最適な入力分布の点の位置 これはボックス制約下で  $X_I$  と  $X_Q$  それぞれの最適な分布を示している．



(a)  $pSNR = 1$  のとき



(b)  $pSNR = 16$  のとき

図 7 AWGN 複素通信路におけるボックス制約下の最適な入力分布

に対称な分布になっている．また全ての  $pSNR$  において 2 点は  $\pm\sqrt{E_{\max}/2}$  に位置している． $pSNR$  が小さいときには最適な入力分布は 2 点のみの分布となる．

$X_I$  と  $X_Q$  のそれぞれの入力分布が, 一次元の AWGN 通信路の通信路容量を達成するとき, それらの同時分布がボックス制約下で最適な入力分布となる．したがって, 上の結果を用いるとボックス制約下の AWGN 複素通信路において通信路容量を達成する入力分布が簡単に求まる．最適な入力分布の点の数は  $m$  を 2 以上の整数として常に  $m^2$  となる．また,  $m > 2$  に対しては各点の確率は一般に等しくない．

図 7(a) と 7(b) は異なる  $pSNR$  に対する最適な入力分布を示している．興味深いことに, 小さな  $pSNR$  に対する最適な入力分布は QPSK であり (図 7(a)),  $pSNR$  が 16 程度のときの最適な入力分布は 16QAM ととてもよく似ている (図 7(b))．

図 8 に  $n$ QAM の達成可能レートとボックス制約下の通信路容量を比較した．注目すべき点は, 各  $pSNR$  において最大の達成可能レートを實現する変調方式が  $pSNR$  の増加とともに QPSK, 16QAM, 64QAM と推移し, かつそれぞれの変調方式が最適であるような  $pSNR$  領域での達成可能レートがいずれも通信路容量に非常に近いことである．これは, ボックス制約下の AWGN 複素通信路では,  $pSNR$  に応じて  $n$ QAM の変調多値数  $n$  を適切に選択することで通信路容量に近いレートを達

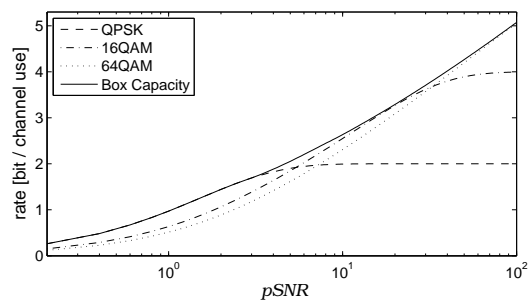


図 8 QPSK, 16QAM, 64QAM の達成可能レートとボックス制約下の通信路容量 Box Capacity とあるのがボックス制約下での通信路容量．

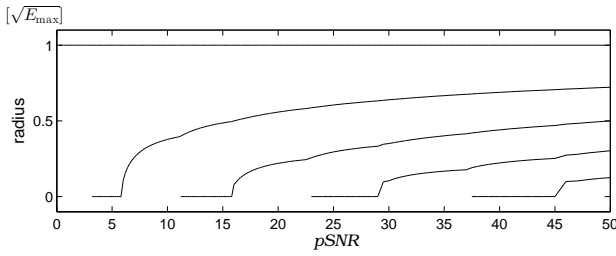


図9 AWGN 複素通信路における円制約下の最適な入力分布の半径方向の点の位置

成可能であることを意味し、現在広く用いられている適応変調のアルゴリズムを情報理論的に正当化するものである。例えば、QPSK, 16QAM, 64QAM が利用可能なとき、平均パワー制約に基づく設計では常に 64QAM を選択することになるが、図 8 の結果を用いると、ボックス制約下では  $pSNR$  が 5.4 以下では QPSK を、33 以下では 16QAM を、それ以上では 64QAM を選択することになる。

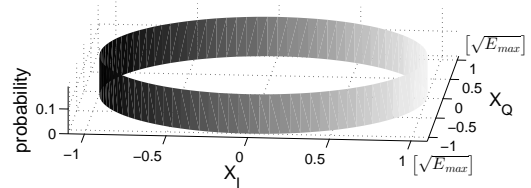
### 3.3 円制約

円制約のもと、AWGN ベクトル通信路の通信路容量とそれを達成する入力分布については既に Shamai(Shitz) らが結果を示している<sup>(6)</sup>。AWGN 複素通信路の場合もこの結果を用いることができる。以下で説明する。

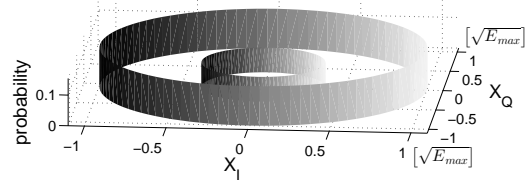
最適な入力分布を説明するには極座標を用いるのが都合が良い。点  $(X_I, X_Q)$  を半径  $r$  と位相  $\phi$  で表す。円制約下で通信路容量を達成する最適な入力分布は  $r$  と  $\phi$  とが独立な分布であること、そして  $\phi$  に関しては一様分布となることが示せる。 $r$  に関する分布は次元の問題となるため、2.4 と同様の手続きによって有限個の孤立点からなる離散分布となることが示せる。したがって最適な入力分布は単一の円、または複数の同心円となる(半径が 0 の円、すなわち原点を孤立点として含むときもある)。このように円制約下での AWGN 複素通信路に対して通信路容量を達成する入力分布は孤立点のみからなる分布ではないが、2.4 の最後に述べたように二次元的な広がりを持たない。同心円の個数、それぞれの半径、確率は  $pSNR$  によって変化する。前の結果と同様、これらは解析的には得られないため数値的手法により計算する。アルゴリズムは 2.5 の方法に従い、KL 情報量の評価は Gauss-Laguerre 積分を用いた。この計算法は Shamai(Shitz) らのもと同様である<sup>(6)</sup>。

図 9, 10 に円制約  $X_I^2 + X_Q^2 \leq E_{\max}$  のもとでの通信路容量を達成する分布を示した。図 9 は最適な入力分布の半径方向の点の位置を  $pSNR$  に対して示したものである。 $pSNR$  が小さいときには点の数は 1 であり、 $pSNR$  が大きくなるにつれて点の数が増える。どの  $pSNR$  に対しても常に一つの点は台の端  $r = \sqrt{E_{\max}}$  に存在する。

図 10 は 2 次元の分布として最適な入力分布を表示したものである。小さい  $pSNR$  に対しては最適な分布が円となり(図 10(a))、 $pSNR$  が大きくなると半径の異なる複数の同心円となること(図 10(b)) が分かる。



(a)  $pSNR = 1$  のとき



(b)  $pSNR = 10$  のとき

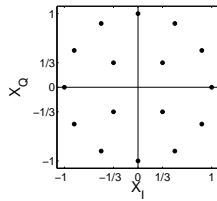
図 10 AWGN 複素通信路における円制約下の最適な入力分布

この結果から、円制約下では、 $pSNR$  が小さい場合には  $n$ PSK を、 $pSNR$  が大きい場合 APSK (amplitude and phase shift keying, 振幅位相偏位) 変調を用いることが有効であることが予想される<sup>(17)(18)</sup>。そこで、QPSK, 16PSK, 及び 16APSK (信号点配置は図 11(a) のとおり) の達成可能レートを円制約下の通信路容量と比較した結果を図 11(b) に示す。図より、 $pSNR$  が小さい領域では、QPSK 及び 16PSK による達成可能レートが通信路容量に大変近いことが分かる。特に、16PSK は余り頻繁に用いられる変調方式ではないが、QPSK に比べて  $pSNR$  の高い領域まで通信路容量に近い達成可能レートが得られていることは興味深い。一方、16APSK の達成可能レートは  $pSNR$  の小さい範囲では 16PSK よりも悪いが、 $pSNR$  がおよそ 5 以上では 16PSK の達成可能レートよりも高く、 $pSNR$  がおよそ 16 までの範囲では円制約下の通信路容量に非常に近いことが分かる。ここで、 $pSNR$  が 5 及び 16 という値は、図 9 においてそれぞれ二つ目の円と三つ目の円が出現する  $pSNR$  にほぼ対応している。以上のことから、円制約下の AWGN 複素通信路では PSK 及び APSK を用いた適応変調によって通信路容量に近いレートが達成でき、図 9 の結果は APSK の振幅レベルの数の切り換えへの有効な指標になるといえる。

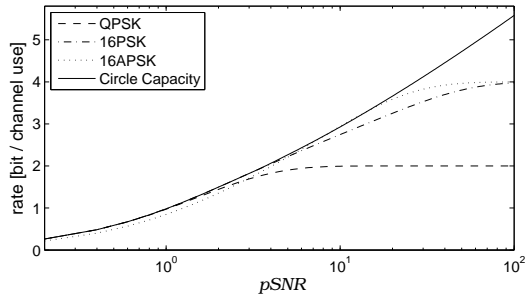
## 4. むすび

通信路容量は入力に許されている自由度の中で最適な入力分布を探すものである。したがって、入力分布に課せられた制約と通信路の性質によって決まるものである。一般に通信システムでは工学的な要請から様々な制約があり、平均パワーのみを考慮した Shannon の結果をそのまま当てはめるのは適切ではない。

重要な制約である最大パワー制約下では、通信路容量を達成する入力分布が離散分布となる、という事実は工学的に実現可能な分布が最適になることを示している。これは通信工学にとっては重要な結果である。本稿では主に AWGN 複素通信路を例に取り、最大パワー制約下での通信路容量とそれを達成する入力分布を調べ、実際に用いられている  $n$ PSK や  $n$ QAM といっ



(a) 16APSK の信号点配置



(b) QPSK, 16PSK, 16APSK の達成可能レートと円制約下の通信路容量・Circle Capacity とあるのが円制約下での通信路容量

図 11 APSK の信号点配置と達成可能レート

た変調方式の達成可能レートと比較した。その結果、ボックス制約下の AWGN 複素通信路では  $n$ QAM の変調多値数を  $pSNR$  に応じて適切に選択することで通信路容量にかなり近いレートを達成できることが確認できた。また、円制約下においては、 $pSNR$  が小さい範囲では  $n$ PSK の、ある程度以上では APSK の達成可能レートが通信路容量とかなり近いことが確認できた。 $n$ PSK や  $n$ QAM では信号点の配置は等間隔であり、それぞれの信号点は等確率で選ばれるように設計されている。したがって通信路容量を達成する分布とは差があるが、通信路容量と達成可能な伝送レートの差は実験的に見る限り小さい。

複素平面上で信号点をどのように配置するかはデジタル通信における変調方式を決める重要な問題である。本稿で示した結果は  $pSNR$  に応じて PSK, APSK, QAM といった広く用いられている信号点配置を切り換えるだけで、通信路容量に非常に近いレートを達成できることを示したものである。これは Shannon の結果として広く知られている  $\log_2(1 + SNR)$  との比較からは示されない。

本稿では通信路容量に関する基礎的な問題について古くから知られている結果を示し、最大パワー制約下で通信路容量を達成する分布が離散分布となる現象を中心について解説した。残念ながら国内ではほとんど関連する研究は行われていないが、世界的にみると、今世紀に入っても関連する問題に対して多くの研究が発表されている。国内の研究者が関連する問題に興味を持って頂くことを願っている。

最後に、本稿の内容に関しては京都大学の田中利幸氏、林和則氏から多くの御助言を頂いた。心より感謝申し上げる。また、草稿を御確認頂いた工学院大学の斎藤秀俊先生、匿名のお二人の先生方に感謝の意を表する。

- (1) C.E. Shannon, "A mathematical theory of communication," Bell System Tech. J., vol.27, pp.379–423 / 623–656, July / Oct. 1948.
- (2) S. Arimoto, "An algorithm for computing the capacity of arbitrary discrete memoryless channels," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.18, no.1, pp.14–20, Jan. 1972.
- (3) K. Nakagawa and F. Kanaya, "A new geometric capacity characterization of a discrete memoryless channel," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.34, no.2, pp.318–321, March 1988.
- (4) R.G. Gallager, Information Theory and Reliable Communication, John Wiley & Sons, Inc., 1968.
- (5) J.G. Smith, "The information capacity of amplitude- and variance-constrained scalar Gaussian channels," Inf. Control, vol.18, pp.203–219, 1971.
- (6) S. Shamai (Shitz) and I. B.-David, "The capacity of average and peak-power-limited quadrature Gaussian channels," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.41, no.4, pp.1060–1071, July 1995.
- (7) A. Tchamkerten, "On the discreteness of capacity-achieving distributions," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.50, no.11, pp.2773–2778, Nov. 2004.
- (8) I.C. A.-Faycal, M.D. Trott, and S. Shamai(Shitz), "The capacity of discrete-time memoryless Rayleigh-fading channels," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.47, no.4, pp.1290–1301, May 2001.
- (9) R. Palanki, "On the capacity achieving distributions of some fading channels," Proc of 40th Annu. Allerton Conf. Communi., Control, and Computing, pp.337–346, Oct. 2002.
- (10) M.C. Gursoy, V. Poor, and S. Verdú, "The noncoherent Rician fading channel—part I: Structure of the capacity-achieving input," IEEE Trans. Wirel. Commun., vol.4, no.5, pp.2193–2206, Sept. 2005.
- (11) S. Shamai(Shitz), "Capacity of a pulse amplitude modulated direct detection photon channel," IEE Proc., vol.137, no.6, pp.424–430, Dec. 1990.
- (12) T.H. Chan, S. Hranilovic, and F.R. Kschischang, "Capacity-achieving probability measure for conditionally Gaussian channels with bounded inputs," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.51, no.6, pp.2073–2088, June 2005.
- (13) S. Ikeda and J.H. Manton, "Capacity of a single spiking neuron channel," Neural Comput., vol.21, no.6, pp.1714–1748, June 2009.
- (14) M.C. Gursoy, H.V. Poor, and S. Verdú, "The capacity of the noncoherent Rician fading channel," Princeton University Technical Report, 2002.
- (15) D.G. Luenberger, Optimization by Vector Space Method, John Wiley & Sons, Inc., 1969.
- (16) S.T. Chung and A.J. Goldsmith, "Degree of freedom in adaptive modulation: a unified view," IEEE Commun. Lett., vol.49, no.9, pp.1561–1571, Sept. 2001.
- (17) S. Ikeda, K. Hayashi, and T. Tanaka, "Capacity and modulations with peak power constraint," [online] arXiv:1005.3889v1 [cs.IT], 2010.
- (18) 落合秀樹, "ピーク電力制限下での APSK 符号化変調の特性について," 信学技報, RCS2011-117, pp.33–38, Aug. 2011.

(IT 研究会提案, 平成 23 年 9 月 20 日受付)

10 月 18 日最終受付)





池田思朗（正員）

1991 東大工・計数卒，1996 東大大学院工学系研究科博士課程了．その後，理化学研究所基礎科学特別研究員，JST さきがけ研究 21「情報と知」領域研究員を経て 2001 九工大助教授．2003 統計数理研究所助教授．2005 から同研究所数理・推論研究系准教授として現在に至る．数理工学の研究に従事．